



Title	リーマン面に関連する位相幾何学 予稿集
Author(s)	河澄, 響矢
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 47, 1
Issue Date	1996-01-01
DOI	10.14943/745
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/783 ; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1237/
Type	bulletin (article)
Note	1996年10月28日～11月1日 於：北海道大学理学部数学教室
File Information	47.pdf



[Instructions for use](#)

リーマン面に関連する位相幾何学

1996年10月28日～11月1日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

Series #47. October, 1996

HOKKAIDO UNIVERSITY

TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- # 15: R. Agemi (Ed.), 第 14 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 55 pages. 1989.
- # 16: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. I, 258 pages. 1990.
- # 17: K. Konno, M.-H. Saito and S. Usui (Eds.), Proceedings of the Meeting and the workshop "Algebraic Geometry and Hodge Theory" Vol. II, 235 pages. 1990.
- # 18: A. Arai (Ed.), 1989 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 72 pages. 1990.
- # 19: H. Suzuki (Ed.), 複素多様体のトポロジー Topology of Complex Manifolds, 133 pages. 1990.
- # 20: R. Agemi (Ed.), 第 15 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 65 pages. 1991.
- # 21: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1990 年度談話会アブストラクト集 Colloquium Lectures, 105 pages. 1991.
- # 22: R. Agemi (Ed.), 第 16 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 50 pages. 1991.
- # 23: Y. Giga, Y. Watatani (Eds.), 1991 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 89 pages. 1992.
- # 24: K. Kubota (Ed.), 第 17 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 29 pages. 1992.
- # 25: K. Takasaki, "非線型可積分系の数理" 1992.9.28~10.2 北海道大学での集中講義 講義録, 52 pages. 1993.
- # 26: T. Nakazi (Ed.), 第 1 回関数空間セミナー報告集, 93 pages. 1993.
- # 27: K. Kubota (Ed.), 第 18 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 40 pages. 1993.
- # 28: T. Hibi (Ed.), 1992 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 108 pages. 1993.
- # 29: I. Sawashima, T. Nakazi (Eds.), 第 2 回関数空間セミナー報告集, 79 pages. 1994.
- # 30: Y. Giga, Y.-G. Chen, 動く曲面を追いかけて, 講義録, 62 pages. 1994.
- # 31: K. Kubota (Ed.), 第 19 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 33 pages. 1994.
- # 32: T. Ozawa (Ed.), 1993 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 113 pages. 1994.
- # 33: Y. Okabe (Ed.), The First Sapporo Symposium on Complex Systems, 24 pages. 1994.
- # 34: A. Arai, Infinite Dimensional Analysis on an Exterior Bundle and Supersymmetric Quantum Field Theory, 10 pages. 1994.
- # 35: S. Miyajima, T. Nakazi (Eds.), 第 3 回関数空間セミナー報告集, 104 pages. 1995.
- # 36: N. Kawazumi (Ed.), リーマン面に関連する位相幾何学, 63 pages. 1995.
- # 37: I. Tsuda (Ed.), The Second & Third Sapporo Symposium on Complex Systems, 190 pages. 1995.
- # 38: M. Saito (Ed.), 1994 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 100 pages. 1995.
- # 39: S. Izumiya (Ed.), 接触幾何学と関連分野研究集会報告集, 186 pages. 1995.
- # 40: H. Komatsu, A. Kishimoto (Eds.), 作用素論・作用素環論研究集会予稿集, 61 pages. 1995.
- # 41: K. Okubo, T. Nakazi (Eds.), 第 4 回関数空間セミナー報告集, 103 pages. 1996.
- # 42: R. Agemi (Ed.), 第 20 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 47 pages. 1996.
- # 43: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol I, 269 pages. 1996.
- # 44: R. Agemi, Y. Giga and T. Ozawa(Eds.), Nonlinear Waves, Proceedings of the Fourth MSJ International Research Institute Vol II, 270 pages. 1996.
- # 45: G. Ishikawa (Ed.), 1995 年度談話会・特別講演アブストラクト集 Colloquium Lectures, 98 pages. 1996.
- # 46: R. Agemi (Ed.), 第 21 回偏微分方程式論札幌シンポジウム予稿集, 34 pages. 1996.

リーマン面に関連する位相幾何学

1996年10月28日～11月 1日

於：北海道大学理学部数学教室

予稿集

はじめに

この予稿集は、平成8年度科学研究費基盤研究A「位相幾何学の総合的研究」（課題番号: 08304006、代表者: 森田茂之先生（東大数理））の補助により1996年10月28日から11月1日まで北海道大学理学部数学教室で行われる研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」に際し、予め各講演者からあつめた原稿をそのまま印刷したものである。

その目的は、参加者が講演への理解を深め、より活発な研究討論を行う一助とするとともに、記録として残すことによって後々の研究に役立てることにある。

この研究集会の開催は、森田先生はじめ多くの方々のご理解ご協力、さらに北海道大学理学部数学教室各位のご支援の上に成り立っていることを付記させていただく。

1996年10月

河澄響矢（北大理）

目次

(配列は講演者の氏名の 50 音順による。)

市川尚志 (佐賀大理工)	
Automorphic forms on the moduli of Riemann surfaces.	2
植村毅 (北大理)	
3 重単純ワイエルシュトラス被覆について.	8
岡井孝行	
種数 2 曲面群の $SU(2)$ -表現を具体的に求める (Guruprasad 氏からの質問への解答)	17
神山靖彦 (琉球大理)	
等辺多角形のトポロジー	22
志甫淳 (東大数理)	
Tangential Map と log scheme	28
田辺正晴 (東工大理)	
Holomorphic maps of Riemann surfaces	38
戸田正智 (東大数理)	
Diffeomorphism type of good torus fibration with twin singular fibers.	42
中西敏浩, Marjatta Näätänen. (静岡大理)	
Weil-Petersson area of the moduli space of torus with one branch point.	44
森下昌紀 (金沢大理)	
On certain non-congruence subgroups of the Teichmüller modular group of genus two obtained from the Jones representation	54

Automorphic forms on the moduli of Riemann surfaces

佐賀大学理工学部数学科 市川尚志 (ichikawa@ms.saga-u.ac.jp)

1996年10月29日

1. Moduli of Riemann surfaces

種数 g の Riemann 面の moduli 空間は complex orbifold として

Teichmüller 空間 T_g /写像類群 Φ_g

と表されるが, Mumford の結果により自然な, すなわち

$$\mathcal{M}_g(S) = \{S \text{ 上の種数 } g \text{ の代数曲線の } S\text{-同型類}\} \quad (S : \text{scheme})$$

となるような \mathbb{Z} 上の (algebraic stack としての) model \mathcal{M}_g を持つ. ここでは \mathcal{M}_g 上の line bundle の section を **Teichmüller modular form** (略して TMF) と呼び, その性質と応用について Riemann theta 関数から導かれる具体例をあげながら述べる.

\mathcal{M}_g 上の line bundle について: $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}_g$ を universal curve とし,

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \wedge^g \pi_*(\Omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}_g}) : \text{Hodge bundle on } \mathcal{M}_g$$

とするとき次が知られている[H, M2]

$$\{\mathcal{M}_g \text{ 上の line bundles の同型類}\} = \lambda^{\mathbb{Z}} \quad (\text{if } g \geq 3),$$

$$\wedge^{3g-3} \Omega_{\mathcal{M}_g} \stackrel{\text{Kodaira-Spencer}}{\cong} \wedge^{3g-3} \pi_*(\Omega_{\mathcal{C}/\mathcal{M}_g}^{\otimes 2}) \stackrel{\text{Mumford}}{\cong} \lambda^{\otimes 13} \quad (\text{if } g \geq 2),$$

($g = 2$ のときは $\lambda^{\otimes 10} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{M}_g}$ (後述)) .

2. Arithmetic Schottky uniformization

まず TMF を調べるのに有効な Schottky uniformization の数論化について述べる. Schottky 群 $\Gamma \subset PGL_2(\mathbb{C})$ によりその不連続領域 $\subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を割って得られる Riemann 面を, Γ で Schottky 一意化された代数曲線といい X_Γ で表す. 代数曲線の Schottky uniformization を local complete ring 上で行った[M1]の方法を nonlocal な場合に拡張することにより次が示される.

定理 1.

(1) $x_{\pm 1}, \dots, x_{\pm g}, y_1, \dots, y_g$ を変数とするとき, 環

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z} \left[x_{\pm 1}, \dots, x_{\pm g}, \prod_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} \right] [[y_1, \dots, y_g]]$$

上の安定代数曲線 C で次を満たすものが存在する.

- C は $A[1/(y_1 \cdots y_g)]$ 上 smooth で, $C|_{y_1=\dots=y_g=0}$ は $\mathbb{Z}[x_{\pm 1}, \dots, x_{\pm g}]$ 上の射影直線の x_k, x_{-k} ($k = 1, \dots, g$) を同一視したもの.

- $\alpha_i \neq \alpha_j$ となる $\alpha_{\pm 1}, \dots, \alpha_{\pm g} \in \mathbb{C}$ と 十分小さい $\beta_1, \dots, \beta_g \in \mathbb{C}^\times$ に対し

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \alpha_{-k} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k & \alpha_{-k} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \pmod{\mathbb{C}^\times}$$

とするとき, $C|_{x_{\pm k}=\alpha_{\pm k}, y_k=\beta_k} = X_{\langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle}$.

(2) C の乗法的周期積分が A の元として表される. すなわち

$$\text{Jac}(C|_{x_{\pm k}=\alpha_{\pm k}, y_k=\beta_k}) \cong (\mathbb{C}^\times)^g / \langle (P_{ij}|_{x_{\pm k}=\alpha_{\pm k}, y_k=\beta_k})_{1 \leq i \leq g} \rangle.$$

を満たす A の元

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{(x_i - x_j)(x_{-i} - x_{-j})}{(x_i - x_{-j})(x_{-i} - x_j)} + \cdots & (\text{if } i \neq j) \\ y_i + \cdots & (\text{if } i = j) \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, g)$$

が存在する.

(3) $x_{-k} = -x_k$ ($k = 1, \dots, g$) と特殊化すると, C は超楕円曲線になる.

さらに定理 1 の一般化として任意の退化代数曲線の数論的変形が (例えば totally degenerate な場合 $\mathbb{Z}[[q_1, \dots, q_{3g-3}]]$ (if $g \geq 2$) 上の安定代数曲線として) 構成される (cf. [Ih-N]).

3. Teichmüller modular forms

整数 $g \geq 2, h$ と \mathbb{Z} -algebra R に対し

$$T_{g,h}(R) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(\mathcal{M}_g, \lambda^{\otimes h} \otimes_{\mathbb{Z}} R) : \text{TMFs}/R \text{ of degree } g \text{ and weight } h.$$

Torelli map τ (curve \mapsto Jacobian) による引き戻し τ^* によって, Siegel modular form から自然に TMF が得られる (τ^* は $g = 2, 3$ のときのみ単射). また $g \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} T_{g,h}(\mathbb{Z}) &\stackrel{\text{lattice}}{\subset} T_{g,h}(\mathbb{C}) : \text{finite dimensional } \mathbb{C}\text{-vector space} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{holomorphic functions on } T_g \\ \text{with automorphy condition of weight } h \text{ for } \Phi_g \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

TMF の例： g 次 Siegel 上半空間上の正則関数

$$\theta_g(Z) = \prod_{\substack{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{0, 1/2\}^g \\ 4\mathbf{a}^t \mathbf{b} : \text{even}}} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} \exp \left(2\pi\sqrt{-1} \left[\frac{1}{2}(\mathbf{n} + \mathbf{a})Z^t(\mathbf{n} + \mathbf{a}) + (\mathbf{n} + \mathbf{a})^t \mathbf{b} \right] \right)$$

: the product of theta constants with even characteristic

に対し [Ig, F-C] より $(\theta_2)^2, \theta_g$ ($g \geq 3$) は Siegel modular form/ \mathbb{Z} , 従って TMF/ \mathbb{Z} となるが, $(\theta_2)^{-2}, \sqrt{\theta_g}$ ($g \geq 3$) も TMF/ \mathbb{C} になることが知られている [T].

定理 1 の C/A より導かれる群準同型 (\mathcal{M}_g の既約性 [D-M] より単射)

$$\kappa : T_{g,h}(R) \longrightarrow A[1/(y_1 \cdots y_g)] \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

は, R 上の Siegel modular form φ に対し $F(\varphi) \in R[q_{ij}^{\pm 1} (i \neq j)][[q_{11}, \dots, q_{gg}]]$ をその数論的 Fourier 展開 [F-C] とするとき

$$\kappa(\tau^*(\varphi)) = F(\varphi)|_{q_{ij}=P_{ij}}$$

を満たす. 従って特に

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \text{ on the Jacobian locus} &\iff F(\varphi)|_{q_{ij}=P_{ij}} = 0 \\ \varphi = 0 \text{ on the hyperelliptic locus} &\iff \left(F(\varphi)|_{q_{ij}=P_{ij}} \right) \Big|_{x_{-k} = -x_k} = 0 \end{aligned}$$

となる (cf. [1]). さらに κ と \mathcal{M}_g の (安定代数曲線の moduli としての) compact 化 [D-M] を用いて TMF を調べることにより次が示される.

定理 2 (cf. [I2, 3, 5]).
(1)

$$N_g = \begin{cases} -2^{28} & (\text{if } g = 3) \\ 2^{2^{g-1}(2^g-1)} & (\text{if } g = 2 \text{ or } g \geq 4) \end{cases}$$

とするとき, $(\theta_2/N_2)^{-2}, \sqrt{\theta_g/N_g}$ ($g \geq 3$) は \mathbb{Z} 上の TMF となりしかも primitive (i.e. $\not\equiv 0 \pmod{p}$ for any prime p). また $g = 2, 3$ のとき

$$\text{Symm}^2 \pi_*(\Omega_{C/\mathcal{M}_g}) \ni (f, g) \longmapsto f \cdot g \in \pi_*(\Omega_{C/\mathcal{M}_g}^{\otimes 2})$$

($g = 2$ なら iso., $g = 3$ なら hyperelliptic locus の外で iso.) が導く morphism

$$\lambda^{\otimes(g+1)} = \wedge^{3g-3} \text{Symm}^2 \pi_*(\Omega_{C/\mathcal{M}_g}) \longrightarrow \wedge^{3g-3} \pi_*(\Omega_{C/\mathcal{M}_g}^{\otimes 2}) \xrightarrow{\text{Mumford}} \lambda^{\otimes 13}$$

はそれぞれ $\pm(\theta_2/N_2)^2, \pm\sqrt{\theta_3/N_3}$ をかけることによって得られる.

(2)

$$T_g^*(\mathbf{Z}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{h \in \mathbf{Z}} T_{g,h}(\mathbf{Z}) \stackrel{\text{if } g \geq 2}{=} \bigoplus_{h \geq 0} T_{g,h}(\mathbf{Z})$$

は有限生成 \mathbf{Z} -algebra で, 特に $g = 2, 3$ のときそれぞれ $(\theta_2/N_2)^{-2}$, $\sqrt{\theta_3/N_3}$ と次数 g の Siegel modular form/ \mathbf{Z} によって生成される.

4. Soliton equation

種数 g の Riemann 面の周期行列 Ω に対し

$$\theta(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^g} \exp \left(2\pi\sqrt{-1} \left[\frac{1}{2} \mathbf{n} \Omega^t \mathbf{n} + \mathbf{n}^t \vec{u} \right] \right) : \text{Riemann theta function}$$

とすると, [Kr]により Riemann 面の微分形式の Laurent 展開係数から定まる g 次元ベクトル $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ と数 c に対して

$$u(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta(x\vec{r}_1 + y\vec{r}_2 + t\vec{r}_3 + \vec{u}) + c \quad (\vec{u} \in \mathbf{C}^g)$$

は KP 方程式

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 3u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) = 0$$

を満たすことが知られている (Riemann 面が超楕円的で $\vec{r}_2 = \vec{0}$ ならば $u(x, t)$ は KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 3u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

の解になる). Riemann 面が退化したとき $u(x, y, t)$ は g -soliton 解

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \left[1 + \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, g\}} \left\{ \prod_{i, j \in I; i < j} \frac{(x_i - x_j)(x_{-i} - x_{-j})}{(x_i - x_{-j})(x_{-i} - x_j)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \prod_{i \in I} w_i \exp \left(- \sum_{1 \leq n \leq 3} \left(\frac{1}{x_i^n} - \frac{1}{x_{-i}^n} \right) t_n \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

(ただし $t_1 = x, t_2 = y, t_3 = t$) を与える[M3]. また[K-N-T-Y]等により $u(x, y, t)$ は点付き Riemann 面の moduli 空間上の TMF と見なすことができる.

定理 1 の universal period (及び universal 1-form) より得られる $u(x, y, t)$ の普遍巾級数表示は, KP, KdV 方程式の解としての soliton 解の一つの変形を与える. またその変形 parameter に p 進体の元を代入することにより次が示される.

定理 3 (cf. [I4]). p 進体上の splitting reduction をもつ代数曲線(Mumford curve) の p 進 theta 関数は KP, KdV 方程式 (より一般に KP, KdV 階層) の解を導く.

References

- [D-M] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75-109
- [F-C] G. Faltings and C.L. Chai, Degeneration of abelian varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 22, Springer-Verlag, 1990
- [H] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, Invent. Math. **72** (1983), 221-239
- [I1] T. Ichikawa, The universal periods of curves and the Schottky problem. Compos. Math. **85** (1993) 1-8
- [I2] T. Ichikawa, On Teichmüller modular forms. Math. Ann. **299** (1994) 731-740
- [I3] T. Ichikawa, Teichmüller modular forms of degree 3. Amer. J. Math. **117** (1995) 1057-1061
- [I4] T. Ichikawa, P -adic theta functions and solutions of the KP hierarchy. Comm. Math. Phys. **176** (1996) 383-399
- [I5] T. Ichikawa, Theta constants and Teichmüller modular forms. to appear in J. Number Theory
- [Ig] J. Igusa, Modular forms and projective invariants, Amer. J. Math. **89** (1967), 817-855
- [Ih-N] Y. Ihara and H. Nakamura, On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem, preprint (1995)
- [K-N-T-Y] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya and Y. Yamada, Geometric realization of conformal field theory, Comm. Math. Phys. **116** (1988), 247-308
- [Kr] I.M. Krichever, Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russian Math. Surveys **32** (1977), 185-214
- [M1] D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, Compos. Math. **24** (1972), 129-174
- [M2] D. Mumford, Stability of projective varieties, Enseign. Math. **23** (1977), 39-110
- [M3] D. Mumford, Tata lectures on theta II, Prog. in Math. vol. 43, Birkhäuser, 1983

- [T] S. Tsuyumine, Thetanullwerte on a moduli space of curves and hyperelliptic loci, Math. Z. **207** (1991), 539-568

1996.10.28

M_g を \mathbb{C} 上で定義される genus g の smooth な既約代数曲線より成る moduli space, \bar{M}_g を M_g の Deligne - Mumford compactification とする。

M_g の filtration として、「Arbarello's Flag」と呼ばれるものが存在している。これは M_g の subvarieties より構成されているが、この subvariety の定義に、単純 Weierstrass 被覆が用いられる。

本講演では、最も基本的な3重の単純 Weierstrass 被覆について、genus との関係も述べる。

§1. Preliminaries

§1の内容は、Arbarello [2], [3], Fulton [4] によるものである。

1. The Hurwitz space

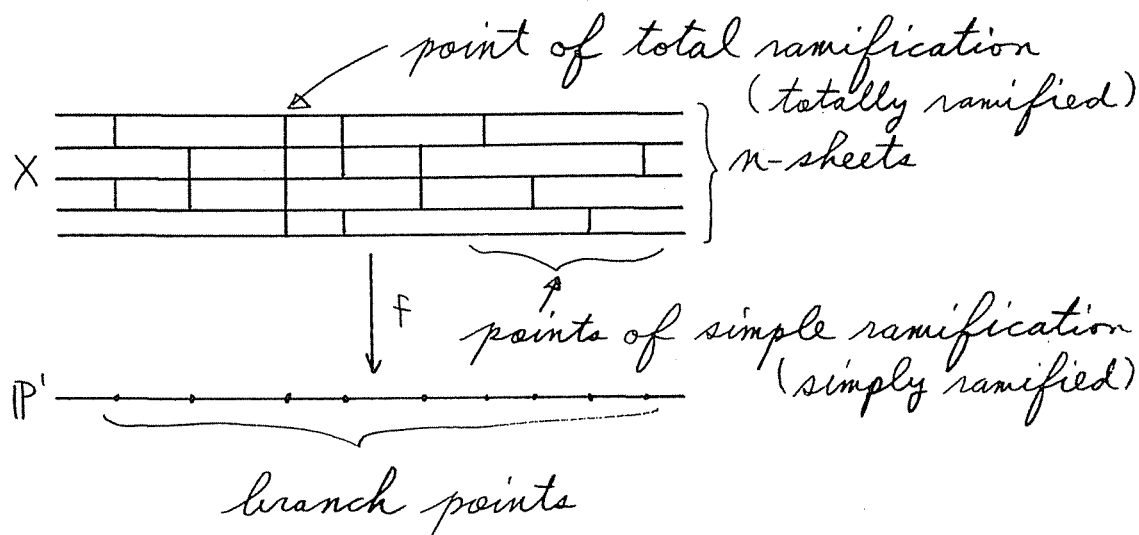
X を compact Riemann surface, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を n 重分枝被覆写像とする。 $x \in X$ における f の分枝指数を $e(x)$ としたとき、

- $R := \{x \in X \mid e(x) \geq 2\}$: f の ramification locus
- R の π を ramification point (X 側の分枝点)
- $\Lambda(f) := f(R)$: f の branch locus
- $\Lambda(f)$ の π を branch point (\mathbb{P}^1 側の分枝点)

と呼ぶことにする。

Def. $X \in X$ が f の point of simple ramification とは, $e(X) = 2$, か)
 $\# \{f^{-1}(f(X)) \cap R\} = 1$ なる点 $X \in X$ のこと。

$X \in X$ が f の point of total ramification とは, $e(X) = n$ なる点
 $X \in X$ のこと。



③ このような分岐形態の表し方は, Arbarello [3] によるものである。

X' も compact Riemann surface とし, $f': X' \rightarrow P'$ も n 重分岐被覆とする。
 f と f' の同値も

$$f \text{ と } f' \text{ が同値} \iff \exists \varphi: X \rightarrow X': \text{bihol. s.t. } f' \circ \varphi = f$$

と定義し, f を含む同値類を (f) と表すことにする。

$(P')^{(w)}$ を P' の w 重対称積とし, discriminant locus

$$\Delta := \{(a_1, \dots, a_w) \in (P')^{(w)} \mid \exists i, j, i \neq j \text{ s.t. } a_i = a_j\}$$

とある。 $(P')^{(w)}$ を P^w と同一視し, 各 $A = (a_1, \dots, a_w) \in P^w - \Delta$ に対し

$$H(n, A) := \{(f) \mid \Delta(f) = A\}$$

$$H(n, w) := \{(f) \mid f \text{ は } w \text{ 個の branch points をもつ}\}$$

と定義し、写像 Δ を

$$(1.1) \quad \Delta: H(n, w) \longrightarrow \mathbb{P}^w - \Delta$$

$$(f) \longmapsto \Delta(f)$$

となるように定義する。(このとき $\forall A \in \mathbb{P}^w - \Delta$ に対し $\Delta^{-1}(A) = H(n, A)$)

このとき $\Delta^{-1}(A)$ を用いることにより $H(n, w)$ に位相が導入でき、よって Δ は位相被覆となり、 $H(n, w)$ は複素多様体となる。

def. 複素多様体 $H(n, w)$ を Hurwitz space of type (n, w) という。

2. The Weierstrass-Hurwitz space

$g = \text{genus}(X)$ とし、 $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を n 重分岐被覆とする。

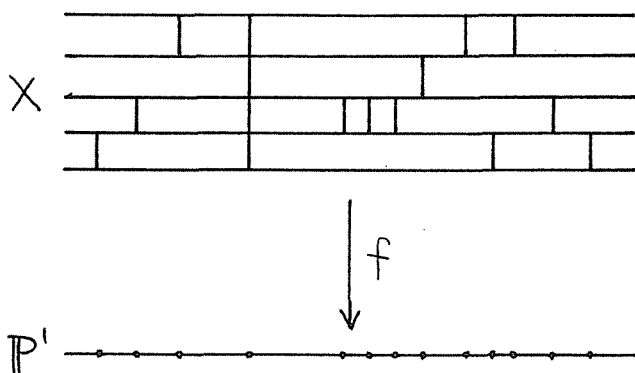
def $WH^{n, w} := \left\{ (f) \in H(n, w) \mid \begin{array}{l} f \text{ は ちょうど } 1 \text{ 点で totally ramified であり、残り} \\ (w-1) \text{ 点で simply ramified である。} \end{array} \right\}$

とする。 $(f) \in WH^{n, w}$ なる n 重分岐被覆を (n, w) 型単純 Weierstrass 被覆 という。この f に対し、Hurwitz の公式より、

$$g = \frac{1}{2}(w - n)$$

なる関係式が成り立つ。

Example $(5, 13)$ 型を図示すると下図のようになる。このとき genus は 4 である。



Remark $(f) \in WH^{n,w}$ 2. $g \geq 2, n \leq g$ のとき, f の point of total ramification は, 必ず X の Weierstrass 点になっている。また, この分岐形態は, X に Weierstrass 点が存在しなくとも ($g=0, 1$ でも) まちんと成立している。

$WH^{n,w}$ は $H(n,w)$ の開集合, かつ開集合となるので, (1.1) の Δ を $WH^{n,w}$ に制限することにより, 有限位相被覆。

$$(2.1) \quad \Delta: WH^{n,w} \longrightarrow \mathbb{P}^w - \Delta$$

が得られる。これにより複素多様体を得られる。

Def. 複素多様体 $WH^{n,w}$ を Weierstrass-Hurwitz space of type (n,w) という。

$WH^{n,w}$ に対し, 次の定理が知られている。(Lüroth, Clebsch)

Th. $WH^{n,w}$ は連結である。 //

$n > 2$ のとき, この $WH^{n,w}$ により, 2 parametrize された Riemann surface の "universal family" が構成できる。これは次の (1), (2) をみたす複素多様体 Y と正則写像 $\kappa: Y \rightarrow \mathbb{P}^1 \times WH^{n,w}$ の対 (Y, κ) のことである。

(1) 各 $S \in WH^{n,w}$ に対し fiber $Y_S = \kappa^{-1}(\mathbb{P}^1 \times \{S\})$ は genus $g = \frac{1}{2}(w-n)$ の Riemann surface

(2) 各 $S \in WH^{n,w}$ に対し, $(\kappa_S) = S$ である。ここで, $\kappa_S = \kappa|_{Y_S}: Y_S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \{S\}$ 。

3. The Weierstrass space and filtration of the moduli space

M_g を \mathbb{C} 上で定義された genus g の smooth な既約代数曲線より成る moduli space とし, smooth な genus g の代数曲線 C に対し, C に対応する M_g の点を $m(C) \in M_g$ と表すことにする。また, \bar{M}_g を M_g の Deligne-Mumford compactification とする。まず, 先程述べた universal family を用い 2. \bar{M}_g の subvariety を構成する。

$n > 2$ とし, $WH^{n,w}$ が universal family $h: Y \rightarrow P^1 \times WH^{n,w}$ を伴, 2
113 とする. $g = \frac{1}{2}(w-n)$ とする. このとき M_g の universal property より

$$M: WH^{n,w} \longrightarrow M_g : \text{analytic map}$$

2. 各 $s \in WH^{n,w}$ に対し $M(s) = M(Y_s)$ ($Y_s = h^{-1}(P^1 \times \{s\})$) となるような写
像が存在する. ここで

$$\begin{aligned} n > 2 \text{ のとき } & W_{n,g} := M(WH^{n,w}) \subset M_g \\ n = 2 \text{ のとき } & W_{2,g} \text{ は hyperelliptic locus} \end{aligned}$$

と, $\bar{W}_{n,g}$ を M_g 内の $W_{n,g}$ の closure とする.

Def. M_g の subvariety $\bar{W}_{n,g}$ を Weierstrass space of type (n,w)
と113.

ここで, (n,w) 型単純 Weierstrass 被覆に一定の条件をつけることも考える.

各 $s \in WH^{n,w}$ に対し, $y(s) \in Y_s$ を h_s の point of total ramification と
する. さらに P^1 の座標を (X_0, X_1) とし, 無限遠点 $\infty \in P^1$ を $(0, 1)$ により表される
点とする. ここで

$$P_\infty^w - \Delta := \{(a_1, \dots, a_w) \in P_\infty^w - \Delta \mid 1 \leq i \leq w, a_i = \infty\}$$

ととき, 有限位相被覆 (2.1) に対し

$$WH_\infty^{n,w} := \{s \in \Lambda^{-1}(P_\infty^w - \Delta) \mid h_s(y(s)) = (\infty, s)\}$$

とおく. すると $WH_\infty^{n,w}$ は $WH^{n,w}$ の $(w-1)$ 次元の部分多様体となる. (連結性は失
われるかも知れないが) これにより Λ を $WH_\infty^{n,w}$ に制限できる. これを改め Λ とする.

$$\Lambda: WH_\infty^{n,w} \longrightarrow P_\infty^w - \Delta : \text{finite top. covering}$$

同様に universal family と, これに誘導された写像も

$$\begin{aligned} h: Y &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \times WH_{\infty}^{n,w} \quad (\text{改めて } R, m \text{ とした}) \\ m: WH_{\infty}^{n,w} &\longrightarrow M_g \end{aligned}$$

と $WH_{\infty}^{n,w}$ に制限でき、しかも

Lemma ([2]) $M(WH_{\infty}^{n,w}) = M(WH_{\infty}^{n,m}) = W_{n,g} //$

から、point of total ramification を無限遠点にしても、Weierstrass space の定義には影響がない。

この Weierstrass space $\bar{W}_{n,g}$ について、次のことが知られている。([2])

Th. $\bar{W}_{n,g}$ は \bar{M}_g の $(2g+n-3)$ 次元の既約な subvariety である。 //

Th. $\bar{W}_{n-1,g} \subset \bar{W}_{n,g} //$

この2つの定理の組み合わせにより、「Arbarello's Flag」と呼ばれる \bar{M}_g の filtration

$$\bar{W}_{2,g} \subset \bar{W}_{3,g} \subset \cdots \subset \bar{W}_{g-1,g} \subset \bar{W}_{g,g} = \bar{M}_g$$

hyperelliptic locus

が得られる。

§2. Genus of simple Weierstrass covering

単純 Weierstrass 被覆は moduli space に filtration を与える重要な被覆である。この § では、最も基本的な 3 重の場合について、genus との関係をもとにすることにする。

compact Riemann surface として、次の形をした代数関数

$$g(w, z) = w^3 - hz^2w + a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

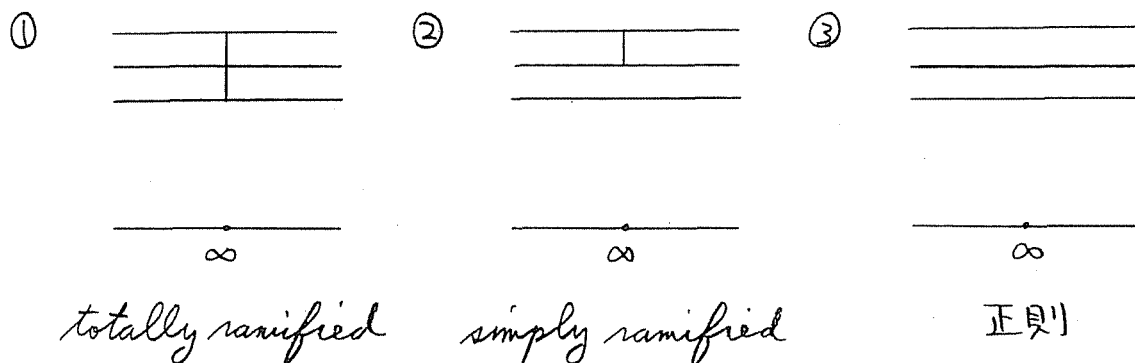
より定義される代数曲線を考える。(w は z の代数関数) ここで h, a_0, \dots, a_n は以下の条件を満たすものとする。

$$\textcircled{*} \begin{cases} h, a_0, a_n \in \mathbb{C} - \{0\}, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C} \text{ であり } g(w, z) = 0 \text{ と} \\ g_w(w, z) = 0 \text{ の連立により得られる } w \text{ の多項式を } R(w) \text{ とおく} \\ \text{と、} R(w) \text{ と } R'(w) \text{ の終結式 } R_{R, R'} \neq 0 \text{ とする。} \end{cases}$$

w の分岐の様子を調べることにより、compact Riemann surface から \mathbb{P}^1 への分岐被覆が単純 Weierstrass か否かがわかる。

④ 内の $R(w)$ は w の $2n$ 次の多項式であるので、w の branch point の候補は、無限遠点をもいれ $(2n+1)$ 個ある。このうち無限遠点以外の $2n$ 個については、計算により全て simply ramified であることがわかる。よって無限遠点の付近でどうなるかを見ればよい。

3 重なので、無限遠点での分岐の様子として考えられるのは次の 3 通り。



このうち②の場合は Hurwitz の公式よりありえないことがわかる。よって無限遠点では *totally ramified* か正則かのどちらかである。また、①と③の場合において、genus g と n の関係式は、Hurwitz の公式より

$$\text{①の場合: } g = n - 1$$

$$\text{②の場合: } g = n - 2$$

となる。

無限遠点での分岐の様子を手計算、もしくは Macintosh のソフト "Mr. Monomie" [1] を用いて計算することにより、次のことがわかった。

n	g	type
2	1	① \Rightarrow (3,5) 型
3	1	③
4	3	① \Rightarrow (3,9) 型
5	4	① \Rightarrow (3,11) 型
6	4	③
7	6	① \Rightarrow (3,15) 型
8	7	① \Rightarrow (3,17) 型

このより、次のことが予想される。

Conj. n が 3 の倍数でないとき、 $g(w, z) = 0$ で定義される代数曲線は $(3, 2n+1)$ 型単純 Weierstrass 被覆となる。

Remark Hurwitz の公式より $n=0, 1$ のときは単純 Weierstrass 被覆とはならないことがわかる。

最後に $n=2$ の場合について述べる。このとき $g=1$ なる $g(w, z) = 0$ により定義される代数曲線は楕円曲線である。

$$g(w, z) = w^3 - hzw + a_2z^2 + a_1z + a_0$$

簡単のため $h=3, a_2=1$ とする。また、 $a_0 \neq 0$ とする。

このときは上の表より (3,5) 型単純 Weierstrass 被覆となることがわかるが、
 そうなるための a_0, a_1 の満たす条件を求めたところ、次の結果を得た。

命題 $g(w, z) = w^3 - 3zw + z^2 + a_1z + a_0$ で定義される楕円曲線から P^1 の
 分岐が (3,5) 型単純 Weierstrass 被覆である。

$$\iff a_1^4 - a_1^3 - 8a_1^2a_0 + 36a_1a_0 + 16a_0^2 - 27a_0 \neq 0$$

この式は $g=0, g_w=0$ の連立より得られる w の 5 次式 $h(w)$ と $h'(w)$ の終結式
 であるが、実は $g(w, z)=0$ を Weierstrass の標準型に表した際の、この式の
 判別式でもある。

References

- [1] K. Akhara, Topology of Algebraic curves and a computer software 'Mr. Monomie', memories of the institute of science and technology, Meiji University, vol. 34, no. 3, 1995
- [2] E. Arbarello, Weierstrass points and moduli of curves, Comp. math. 29. (1974) 325-342
- [3] _____, On subvarieties of the moduli space of curves of genus 2 defined in terms of Weierstrass points, Atti. Accad. Naz. Lincei. 15 (1978) 3-20
- [4] W. Fulton, Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves, Annals of Math. 90 (1969), 542-575

種数2曲面群のSU(2)-表現を具体的に求める

(Guruprasad 氏からの質問への解答)

岡 井 孝 行

§1. Question and Answer.

Let Σ_2 be the closed surface of genus 2 and $\pi_1(\Sigma_2) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid [\alpha_1, \beta_1][\alpha_2, \beta_2] = 1 \rangle$.

We will abbreviate $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ to $(a; b)$.

Question (Guruprasad) Can you write down explicitly one irreducible representation of $\pi_1(\Sigma_2)$ into $SU(2)$?

In this article we will concentrate on representations ρ with $\rho([\alpha_i, \beta_i]) \neq \pm I$. Before giving an answer to the above question, we prepare the following

Lemma. For any $A = (a; b) \in SU(2) \setminus \{\pm I\}$, let us fix a $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ so that $\operatorname{Re} a = \cos \theta$. Then $X \in SU(2)$ satisfies $XAX^{-1} = (e^{i\theta}; 0)$ if and only if X has the following forms:

(i). In the case $b \neq 0$, $X = (e^{i\Phi}; 0) \left(\frac{|b|}{\sqrt{|a - e^{i\theta}|^2 + |b|^2}}; \frac{-\bar{a} + e^{-i\theta}}{b} \frac{|b|}{\sqrt{|a - e^{i\theta}|^2 + |b|^2}} \right)$
(any $\Phi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ will do).

(ii). In the case $b=0$ and $a=e^{i\theta}$, $X = (e^{i\Phi}; 0)$ (any Φ will do).

(iii). In the case $b=0$ and $a=e^{-i\theta}$, $X = (0; e^{i\Phi})$ (any Φ will do). \square

Thus for $\rho: \pi_1(\Sigma_2) \rightarrow SU(2)$ with $\rho([\alpha_i, \beta_i]) \neq \pm I$, after making a conjugation by an element of $SU(2)$, we may assume that $\rho([\alpha_i, \beta_i]) = (e^{i\theta}; 0)$ with $\sin \theta \neq 0$.

Now we will state our answer:

Theorem 1. For $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ with $\sin \theta \neq 0$, $\alpha, \beta \in SU(2)$ satisfy $[\alpha, \beta] = (e^{i\theta}; 0)$ if and only if

$$\alpha = (R(1 + i \tan(\frac{\theta}{2})); (1 - (\frac{R}{\cos(\frac{\theta}{2})})^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}) \quad (\Rightarrow \alpha(\theta; R, \varphi))$$

$$\beta = (U(1 - i \tan(\frac{\theta}{2})); (1 - (\frac{U}{\cos(\frac{\theta}{2})})^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}) \quad (\Rightarrow \beta(\theta; U, \psi))$$

with $(*)_{\theta} : R U \sin(\frac{\theta}{2}) = ((\cos(\frac{\theta}{2}))^2 - R^2)^{\frac{1}{2}} ((\cos(\frac{\theta}{2}))^2 - U^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{\theta}{2} - \varphi + \psi)$,

where $R, U \in \mathbb{R}$ with $|R|, |U| \leq |\cos(\frac{\theta}{2})|$ and $\varphi, \psi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Proof. For $\alpha = (a; b)$, $\beta = (c; d) \in SU(2)$, from the condition $\text{tr}(\alpha \beta \alpha^{-1}) = \text{tr}((e^{i\theta}; 0) \beta)$, we have for $c = c_1 + i c_2$, $c_2 = -\tan(\frac{\theta}{2}) c_1$ and thus $d = (1 - (\frac{c_1}{\cos(\frac{\theta}{2})})^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\psi}$. Also from $\text{tr}(\beta \alpha \beta^{-1}) = \text{tr}((e^{-i\theta}; 0) \alpha)$, we have $a_2 = \tan(\frac{\theta}{2}) a_1$ and $b = (1 - (\frac{a_1}{\cos(\frac{\theta}{2})})^2)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$. Now from the equation $\alpha \beta = (e^{i\theta}; 0) \beta \alpha$, we deduce the single constraint $(*)_{\theta}$. \square

Thus from $\alpha_1 = \alpha(\theta; R_1, \varphi_1)$, $\beta_1 = \beta(\theta; U_1, \psi_1)$ with $(*)_{\theta}$ and $\alpha_2 = \alpha(-\theta; R_2, \varphi_2)$, $\beta_2 = \beta(-\theta; U_2, \psi_2)$ with $(*)_{-\theta}$ ($\sin \theta \neq 0$), we obtain all (irreducible) representations $\rho: \pi_1(\mathbb{Z}_2) \rightarrow SU(2)$ with $\rho([\alpha_i, \beta_i]) = (e^{i\theta}; 0)$ ($\sin \theta \neq 0$).

Example. ($\theta = \frac{\pi}{3}$, $R = \frac{1}{2}$, $U = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\varphi = 0$, $\psi = \frac{\pi}{6}$). $\alpha = (\frac{1}{2}(1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}); \sqrt{\frac{2}{3}})$ and $\beta = (\frac{3}{\sqrt{14}}(1 - i\frac{1}{\sqrt{3}}); \sqrt{\frac{2}{14}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}))$ satisfy $[\alpha, \beta] = (e^{i\frac{\pi}{3}}; 0)$.

§2. Moduli space with fixed commutator

Using the parameters and equation appeared in Theorem 1, we will investigate the topology of

$$\text{Rep}(\theta) = \{(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \in (SU(2))^4 \mid [\alpha_1, \beta_1] = (e^{i\theta}; 0), [\alpha_2, \beta_2] = (\bar{e}^{i\theta}; 0)\} / \text{conj.}$$

for θ with $\sin \theta \neq 0$.

Lemma. The 1-parameter group $\{(e^{i\theta}; 0); \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ is set-wise fixed by the conjugation of $Y \in SU(2)$ if and only if (1) $Y = (e^{i\Phi}; 0)$ (any Φ will do) or (2) $Y = (0; e^{i\Phi})$ (any Φ will do). \square

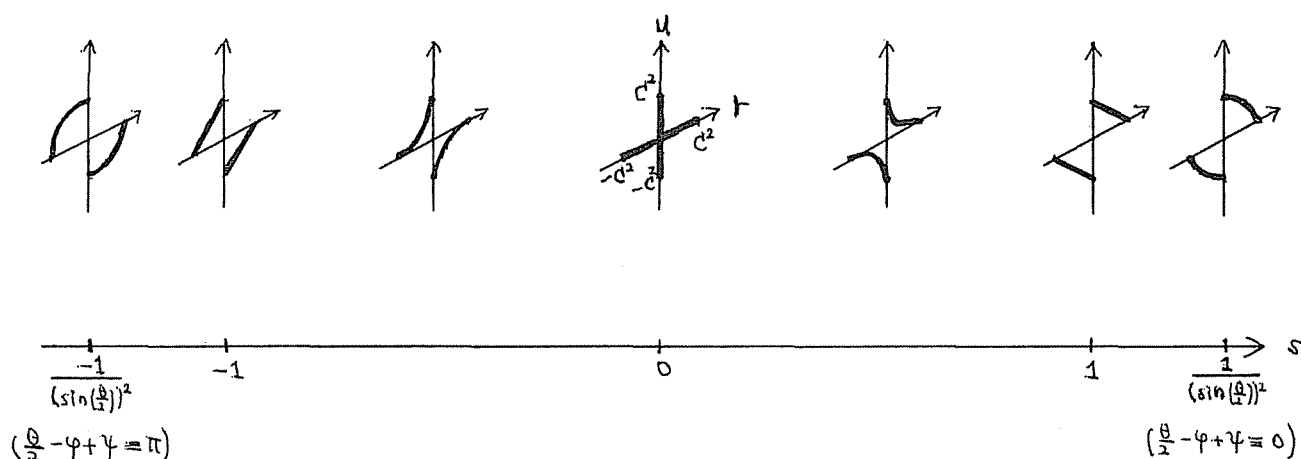
Lemma. Consider the conjugation $\gamma \mapsto Y \gamma Y^{-1}$.

(1). For $Y = (e^{i\Phi}; 0)$, we have $\alpha(\theta; R, \varphi) \mapsto \alpha(\theta; R, \varphi + 2\Phi)$ and $\beta(\theta; U, \psi) \mapsto \beta(\theta; U, \psi + 2\Phi)$.

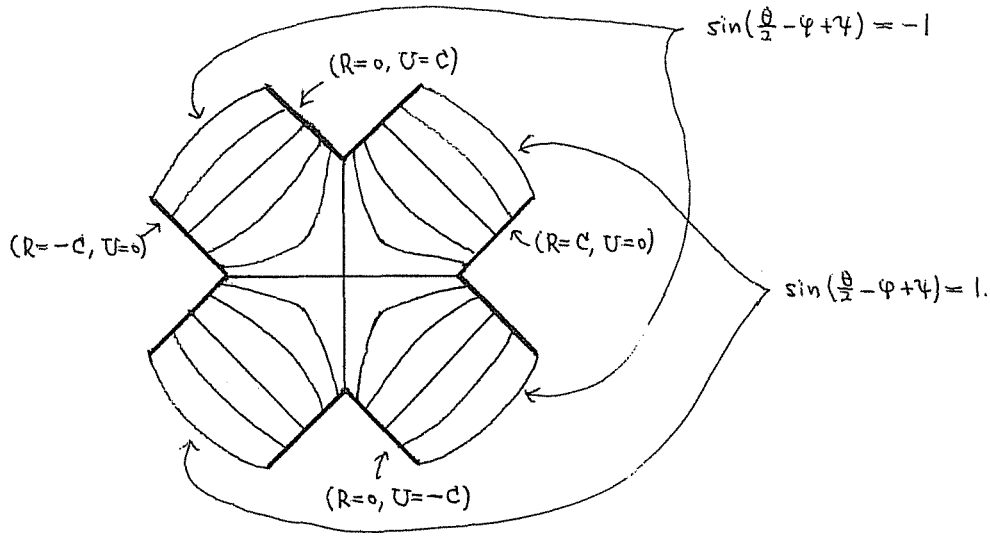
(2). For $Y = (0; e^{i\Phi})$, we have $\alpha(\theta; R, \varphi) \mapsto \alpha(-\theta; R, -\varphi + 2\Phi)$ and $\beta(\theta; U, \psi) \mapsto \beta(-\theta; U, -\psi + 2\Phi)$. \square

Thus we may assume θ to be $0 < \theta < \pi$. Now $\text{Rep}(\theta)$ is fixed only by conjugations of elements of type $(e^{i\Phi}; 0)$. Note that, for $\alpha_1 = \alpha(\theta; R_1, \varphi_1)$, $\beta_1 = \beta(\theta; U_1, \psi_1)$ satisfying $(*)_{\theta}$ and $\alpha_2 = \alpha(-\theta; R_2, \varphi_2)$, $\beta_2 = \beta(-\theta; U_2, \psi_2)$ satisfying $(*)_{-\theta}$, the quantities $R_1, U_1, \varphi_1 - \psi_1, R_2, U_2, \varphi_2 - \psi_2, \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \psi_2, \psi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2$ are fixed by these conjugations.

First we will describe the set $\{(R, U, \varphi - \psi) \text{ with } (*)_{\theta}\}$. Let us change variables from $(R, U, \varphi - \psi)$ to (r, u, s) by $r = (\text{sign } R) \cdot R^2$, $u = (\text{sign } U) \cdot U^2$, $s = \text{sign} \left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \varphi + \psi)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right) \cdot \left(\frac{\sin(\frac{\theta}{2} - \varphi + \psi)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right)^2$. Let $C = |\cos(\frac{\theta}{2})|$. From the equation $(*)_{\theta}$, we have the following picture:



That is, $\{(t, u, s) \text{ with } (*)_0\}$ is homeomorphic to the following :



Now pulling back by $\varphi - \psi \mapsto \sin(\frac{\theta}{2} - \varphi + \psi)$, we conclude that $\{(R, U, \varphi, \psi) \text{ with } (*)_0\} = S^2 \setminus \coprod^4 D^2$.



Next perform the above procedure for (α_1, β_1) and (α_2, β_2) simultaneously. Roughly speaking, because $\varphi_1 - \varphi_2$ (or $\varphi_1 - \psi_2, \psi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2$) $\in S^1$ measures the "difference" between (α_1, β_1) and (α_2, β_2) , we have $\text{Rep}(\theta) \cong (S^2 \setminus \coprod^4 D^2) \times (S^2 \setminus \coprod^4 D^2) \times S^1$. But carefully observing the effects of conjugations, we obtain the following conclusion: Look at each $\partial D^2 \times \partial D^2 \times S^1$. For example, for $(\alpha_1 = (e^{i\frac{\theta}{2}}; 0), \beta_1 = (0; e^{i\psi_1}))$ and $(\alpha_2 = (e^{-i\frac{\theta}{2}}; 0), \beta_2 = (0; e^{i\psi_2}))$, the conjugation of $(e^{i\frac{\theta}{2}}; 0)$ gives a mapping $\alpha_1 \mapsto \alpha_1$, $\beta_1 \mapsto (0; e^{i(\psi_1 + 2\frac{\theta}{2})})$, $\alpha_2 \mapsto \alpha_2$, $\beta_2 \mapsto (0; e^{i(\psi_2 + 2\frac{\theta}{2})})$. Thus after being divided by conjugations, each ∂D^2 collapse to a point and only the parameter $\psi_1 - \psi_2 \in S^1$ (not

$\varphi_1 - \varphi_2$ still remains. Likewise in $\partial D^2 \times (S^2 \setminus \coprod \bar{D}^2) \times S^1$, we must collapse ∂D^2 to a point and yield $(S^2 \setminus \coprod \bar{D}^2) \times S^1$. After all, we have an S^1 -bundle over $S^2 \times S^2$, as a description of the space $\text{Rep}(\theta)$ ($0 < \theta < \pi$).

Let us write down the transition function of this S^1 -bundle: From $\{(R_n, U_n, \varphi_n - \psi_n); |R_n| \neq \emptyset\}$ and $\{(R_n, U_n, \varphi_n - \psi_n); |U_n| \neq \emptyset\}$, we can define open sets $V_n^{(1)}$ and $V_n^{(2)} \subset S^2$ ($n=1, 2$), each of which is homeomorphic to $S^2 \setminus \{\text{two points}\}$. Set $W^{(i,j)} = V_1^{(i)} \times V_2^{(j)}$; we obtain an open covering $S^2 \times S^2 = \bigcup_{i,j=1,2} W^{(i,j)}$. On $W^{(1,1)}$ (resp. $W^{(1,2)}, W^{(2,1)}, W^{(2,2)}$), we have $\varphi_1 - \varphi_2$ (resp. $\varphi_1 - \psi_2, \psi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2$) as a parametrization of the fiber S^1 . Now we can determine the transition function $g_{(i,j),(k,l)} : W^{(i,j)} \cap W^{(k,l)} \longrightarrow \text{Homeo}(S^1)$; For example on $W^{(1,1)} \cap W^{(2,2)}$, we have two parametrizations $\varphi_1 - \varphi_2$ and $\psi_1 - \psi_2$ for S^1 , and thus

$$g_{(1,1),(2,2)}(x) = -(\varphi_1 - \varphi_2) + (\psi_1 - \psi_2) = -(\varphi_1 - \psi_1) + (\varphi_2 - \psi_2).$$

(Note that $x \in W^{(1,1)} \cap W^{(2,2)}$ is determined by R_n, U_n and $\varphi_n - \psi_n$ ($n=1, 2$)).

Summing up, we have the following

Theorem 2. For $0 < \theta < \pi$, $\text{Rep}(\theta)$ has a description as an S^1 -bundle over $S^2 \times S^2$ and its transition function (see the above notation) is given by

$$\begin{aligned} g_{(1,1),(1,2)}(x) &= \varphi_2 - \psi_2, & g_{(1,1),(2,1)}(x) &= -(\varphi_1 - \psi_1), & g_{(1,1),(2,2)}(x) &= -(\varphi_1 - \psi_1) + (\varphi_2 - \psi_2), \\ g_{(1,2),(2,1)}(x) &= -(\varphi_1 - \psi_1) - (\varphi_2 - \psi_2), & g_{(1,2),(2,2)}(x) &= -(\varphi_1 - \psi_1), & g_{(2,1),(2,2)}(x) &= \varphi_2 - \psi_2. \end{aligned}$$

Remarks. (1). For $\theta = \pi$, $\text{Rep}(\pi)$ becomes $SO(3) \setminus (SO(3) \times SO(3)) (\approx SO(3))$, where $X \cdot (A_1, A_2) = (XA_1, XA_2)$ for $X \in SO(3)$ and $(A_1, A_2) \in SO(3) \times SO(3)$. (cf. For the group $SU(1,1)$ instead of $SU(2)$, $\text{Rep}(\pi) = \Phi$).

(2). For $\theta = 0$, (α_1, β_1) and (α_2, β_2) belong to some 1-parameter subgroups respectively, and $\text{Rep}(0)$ is somewhat complicated.

等辺多角形のトポロジー

神山靖彦 (琉球大. 理)

§1 序文

Kirwan [7] は, S^2 の semistable n -points のなす configuration space を, symplectic geometry を使って考察した。つまり, $n \in \mathbb{N}$ を固定したとき,

$(x_1, \dots, x_n) \in (S^2)^n$ が semistable
 $\stackrel{\text{def}}{=} \{x_i\}$ のうち, 等しい元の多重度は $\frac{n}{2}$ 以下である。
と定義し, 空間

$V_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in (S^2)^n ; (x_1, \dots, x_n) \text{ は semistable} \} / \text{PSL}(2, \mathbb{C})$
を考察したのである。

この講演では, 上の S^2 を S^1 に変えた場合の結果, 及び S^2 の場合の新しい幾つかの結果を紹介したい。

§2. S^1 case

M_n を \mathbb{R}^2 内の, 1 辺を固定した等辺多角形の空間とする:

$$M_n = \{ (u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^2)^n ; |u_{i+1} - u_i| = 1 \ (1 \leq i \leq n-1), \\ |u_1 - u_n| = 1, u_1 = \left(\frac{1}{2}\right), u_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \}.$$

すると M_n が 次の空間と自然に同一視できる事は容易に証明される.

$\{(x_1, \dots, x_n) \in (S^1)^n; (x_1, \dots, x_n) \text{ is semistable}\} / \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

我々は. この M_n の topology を考察したい.

例 $M_3 = \{2 \text{ points}\}$, $M_4 \stackrel{\text{homeo}}{=} \bigcirc \bigcirc$

$M_5 \stackrel{\text{diffeo}}{=} \text{genus 4 の Riemannian surface.}$

また. M_n の smoothness については 次の事が分かっている.

Proposition (i) n が odd のとき. M_n は smooth な $n-3$ dimensional manifold である.

(ii) n が even のとき. M_n は singular points を持つ $n-3$ dimensional manifold である.

$(u_1, \dots, u_n) \in M_n$ が singular point \Leftrightarrow 全ての u_i が x 軸上に有る.

更に. $n=2m$ と置くと. singular points は

$C(S^{m-2} \times S^{m-2})$ の近傍を持つ. ここで $C = \text{cone}$.

最後に、 $H^*(M_n; \mathbb{Z})$ は次の定理で与えられる。

Theorem [3]. $H^*(M_n; \mathbb{Z})$ は free \mathbb{Z} -module であり、

M_n の Poincaré polynomial $PS(M_n) = \sum_{q=0}^n \text{rank } H_q(M_n; \mathbb{Z}) t^q$

は次の通りである。

$$PS(M_{2m+1}) = \sum_{\lambda=0}^{m-2} \binom{2m}{\lambda} t^{\lambda} + 2 \binom{2m}{m-1} t^{m-1} + \sum_{\lambda=m}^{2m-2} \binom{2m}{\lambda+2} t^{\lambda},$$

$$PS(M_{2m}) = \sum_{\lambda=0}^{m-2} \binom{2m-1}{\lambda} t^{\lambda} + \binom{2m}{m-1} t^{m-1} + \sum_{\lambda=m}^{2m-3} \binom{2m-1}{\lambda+2} t^{\lambda},$$

ここで $\binom{a}{b}$ は binomial coefficient である。

§3 S^2 case

V_n を、Kirwan が考察した空間とする。等辺多角形の空間としては、 V_n は次の様な空間と同一視される。

まず

$$\mathcal{C}_n = \{(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}^3)^n; |u_{i+1} - u_i| = 1 \ (1 \leq i \leq n-1), \\ |u_1 - u_n| = 1, u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

と置く。

$SO(2)$ を、 x 軸上の各点を不動にする $SO(3)$ の元全体と考えると、 $SO(2)$ は \mathcal{C}_n に作用する。この下で

$V_n = \mathcal{C}_n / SO(2)$ とするのである。

さて、この V_n を考察したいのであるが、まず次の例が知られている。

例 $V_3 = \{ \text{point} \}$, $V_4 = S^2$,

$V_5 = \text{del Pezzo surface of degree 5}$,

ここで del Pezzo surface of degree 5 とは、 \mathbb{CP}^2 内の general position にある 5 点での blow up によって得られる projective surface である。

また、 V_n は Kähler manifold である事が知られている。その smoothness については、§2 Proposition statements を次の 2箇所に変更すれば良い。

(1) $n-3$ を complex dimension と解釈する。

(2) n が even のとき、 V_n の singular points は $C(S^{n-3} \times_{S^1} S^{n-3})$ の近傍を持つ。

最後に、現在分かっている V_n の topology は次の通りである。

(I) [7]. n が odd のとき

$$PS(V_n) = 1 + nt^2 + \dots + \left\{ 1 + (n-1) + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{\min(j, n-3-j)} \right\} t^{2j} + \dots + t^{2n-6}$$

(II) [5]. n が even のとき

$PS(V_n)$ は決定されている。(結果が複雑なのでここでは省略する)。

(III) [5]. 以下 n は odd とする。

(i) $1 \leq j \leq n-3$ に対し

$$\pi_j(V_n) = \begin{cases} 0 & j=1 \\ \mathbb{Z}^n & j=2 \\ \pi_j((S^2)^{n-1}) & 3 \leq j \leq n-3. \end{cases}$$

(ii) $* \leq n-3$ のとき. ring として

$$H^*(V_n; \mathbb{Q}) = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \otimes \mathbb{Q}[P] \text{ である.}$$

$$i=1^n \quad \deg \alpha_i = 2, \quad \deg P = 4 \text{ である.}$$

$\Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は $\{\alpha_i\}$ を simple system of generators として持つ algebra である。

更に, V_n に自然に作用する Σ_n は, α_i には permutation τ^n , ρ_i には trivial に作用する.

従って $* \leq n-3$ のとき

$$H^*(V_n/\Sigma_n; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\beta, \rho] \quad \tau^n \text{ である.}$$

ここで $\deg \beta = 2$ τ^n である.

(この結果は, "Klyachko の予想" の肯定的解決である).

(iii) $n = 2m+1$ と置くと, oriented cobordism ring Ω_*^{SO} の中で $V_{2m+1} = (-1)^{m+1} \binom{2m-1}{m} \mathbb{Q} p^{2m-2}$ τ^n である.

References

- [1] Y. Kamiyama, Topology of equilateral polygon linkages, Top. and its Applications 68, (1996), 13-31.
- [2] Y. Kamiyama, Topology of equilateral polygon linkages, 第43回トポロジ-シンポジウム講演集, (1996), 32-41.
- [3] Y. Kamiyama & M. Tezuka, Topology and geometry of equilateral polygon linkages in the Euclidean plane, preprint, 1995.
- [4] Y. Kamiyama, Topology of equilateral polygon linkages in the Euclidean plane modulo isometry group, preprint, 1995.
- [5] Y. Kamiyama, in preparation.
- [6] M. Kapovich & J. Millson, On the moduli space of polygons in the Euclidean plane, Journal of Diff. Geometry 42, (1995), 133-164.
- [7] F. Kirwan, Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, Princeton University Press, (1984).

TANGENTIAL MAP と LOG SCHEME

東京大学数理科学研究科 志甫 淳

1. 序

本稿では、基本群の tangential base point, あるいは基本群間の tangential map と
言われるものが log scheme という scheme を一般化したものを用いて formulate でき
ることを述べる。

本文の構成は以下の通りである。まず、Section 2 では tangential base point 及び
tangential map について復習し、次に Section 3 で log structure についての基本事項
を述べる。そして Section 4 で log scheme を用いた tangential map の定義を述べたい
と思う。

最後に、本稿を書く機会を与えて下さった松本 眞先生及び河澄 響矢先生、そして温
かく指導して下さいった斎藤 毅先生に深く感謝の意を捧げたいと思います。なお、筆
者は日本学術振興会の特別研究員 (DC) として、援助を受けています。

2. TANGENTIAL BASE POINT と TANGENTIAL MAP

この Section では基本群の tangential base point 及び tangential map について大体
の感じを述べる。

X を複素多様体, $D \subset X$ を単純正規交叉因子とする。即ち, $D = \sum_{i \in I} D_i$ (ここで I
は有限な添字集合) で、各 D_i は X の余次元 1 の複素多様体で、 $i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対し、
 D_i と D_j は transversal に交わっているとする。 $U := X - D$ とおく。基点 $x \in U$ を決め
ると U の基本群 $\pi_1(U, x)$ が定義されるわけであるが、tangential base point とは、 D
のある点に「限りなく近い所」に基点をとるという話である。具体的には次の様に考え
る。 $J \subset I$ をある部分集合とし、 $D_J := \bigcap_{j \in J} D_j$, $D'_J := \bigcup_{i \notin J} (D_i \cap D_J)$, $D_J^0 := D_J - D'_J$
とおく。そして N_J を D_J の X 内での normal bundle とする。各 $j \in J$ に対して D_J
の D_j 内での normal bundle は自然に N_J の因子になっているが、それらの $j \in J$ に
関する和集合を E_J とおく。自然な射影 $p : N_J \rightarrow D_J$ に対し $N'_J := E_J \cup p^{-1}(D'_J)$,
 $N_J^0 := N_J - N'_J$ とおく。すると p の制限 $p^0 : N_J^0 \rightarrow D_J^0$ は D_J^0 上の $(\mathbb{C}^\times)^{\#(I-J)}$ -bundle
となっている。以上の準備のもとに、 $t \in N_J^0$ をひとつとる。この時、 t を基点にとれる
というのである。つまり、 t を決めるということは $d := p^0(t)$ を始点とする無限小の矢
印を決めることであり、この矢印の方向にある d に「充分近い点」 $x \in U$ を基点とす
る基本群を考えた場合、それは x のとり方を変えても canonical に同型がある。従って
 t を基点とする基本群 $\pi_1(U, t)$ を $\pi_1(U, t) := \pi_1(U, x)$ (x は上の様な点) と定義すると、
これは well-defined である。このような基点 t のことを tangential base point という。

次に tangential map について述べる. X, D を上の通りとする. $J \subset I$ に対して, D_J^0, N_J^0 を上の様に定義する. そして $s: D_J^0 \rightarrow N_J^0$ を p^0 の section とする. すると, s は $D_J^0 \subset X$ を U 内へと「無限小にずらすずらし方」を定めている. Map $f_s: D_J \rightarrow U$ を「このずらし方に充分近い様な map」とする. 基点 $d \in D_J^0$ を決めると, 基本群の写像 $f_s: \pi_1(D_J, d) \rightarrow \pi_1(U, f_s(d))$ を得る. f_s が「 s の定めるずらし方に充分近い」とき, これは f_s のとり方によらず well-defined な基本群の写像 $\pi_1(D_J^0, d) \rightarrow \pi_1(U, s(d))$ を定める. (但し, $s(d)$ は tangential base point.) これを tangential map という. 尚, 簡単のため基点 d を $d \in D_J^0$ ととったが, 更に適当な状況のもとで, D_J^0 の方の基点も tangential base point をとることができる.

通常の基本群に関してはこれでいいのだが, X や D がある体 $k \subset \mathbb{C}$ 上の smooth な代数多様体で基本群として代数的基本群 π_1^{alg} を考える場合は, 上の方法では問題がある. つまり, 代数多様体に対して問題を考えた場合, 「充分近い点」に基点をとって基本群を考えることはできないし, また「 s の定めるずらし方に充分近い様な map」も定義できない. つまり, map $f_s: D_J^0 \rightarrow U$ という map も, 代数的な射として存在しないことが多いのである.

しかしながら, tangential base point あるいは tangential map は, 代数的基本群に対しても定義する事が出来るのである. 以下, scheme S に対して, S 上 finite etale な scheme の成す圏を $\text{Fet}(S)$ と書く. Grothendieck の考えによれば, base point というのは fiber functor

$$(2.1) \quad \text{Fet}(S) \longrightarrow (\text{Finite Sets})$$

のことであり, また, 二つの scheme S, S' に対して functor の可換図式

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Fet}(S') & \longrightarrow & \text{Fet}(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Finite Sets}) & \xlongequal{\quad} & (\text{Finite Sets}) \end{array}$$

(ここで縦の矢印は fiber functor) があれば, 基本群の射 $\pi_1^{\text{alg}}(S, *) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(S', *)$ (ここで $*$ は適当な base point.) が出来るのであった. 従って, $t \in N_J^0$ に対して (2.1) のような functor を与える方法を定義してやれば tangential base point が定義され, また section $s: D_J^0 \rightarrow N_J^0$ と適当な基点 d に対して (2.2) のような functor の図式を与える方法を定義してやれば上の f_s のような射が存在しなくても tangential map $\pi_1^{\text{alg}}(D_J^0, d) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(U, s(d))$ が定義されるのである.

このような考えに基づいて, P. Deligne により tangential base point が定義された. 彼の論文 [D1] においては $\dim X = 1$ の時のみ詳しく述べられているが, 実際彼の方法は上の状況のもとでも同様にできる. 彼はこれを用いて, 多重 log torsor というものが, 基本群から自然に定まるある fundamental torsor の subquotient として表されるということを示した. また, 伊原先生は, Puiseux sections というものを用いて tangential map を定義し, これを用いて, さまざまな (moduli として現れる) 代数多様体の代数的基本群へのガロア群の作用を記述された. (例えば [I-M].)

さて、本稿では log scheme という scheme を一般化したものを用いて tangential base point 及び tangential map を定義する方法について述べる。アイデアとしては Deligne によるものとほぼ同じであるが、(Deligne あるいは Puiseux sections と比較したときの) この方法の利点としては、次が挙げられると思う。

- (1) Deligne の考えによると、基本群の理論は motivic なものであり、従って de Rham 基本群、あるいはクリスタル基本群というものに対しても tangential base point あるいは tangential map が定義されて欲しいわけであるが、log scheme による方法だと、これら全ての基本群に対して同様の方法でそれらが定義される。即ち、tangential base point, tangential map というもの自体が motivic であろうということがわかる。また、各基本群間の compatibility の証明も容易である。(なお、クリスタル基本群に対する、log scheme を用いた tangential base point の定義は[S]に書いている。)
- (2) 実際に射 $f_s : D_J \rightarrow U$ が構成されるというわけではないが、それに近い状況にあることがわかる。つまり、基本群間の tangential map は、ある「射」から induce されるものであるということがわかる。

3. LOG STRUCTURES

この Section では、本稿で用いられる log structure に関する基本事項を述べる。なお、紙面の関係もあり、ここで十分に述べることは到底不可能なので、くわしく知りたい方は[Kf], [Kk], [Kk2], [Kk3], [F-Kk], [Kk-N]等を参照して欲しい。

まず log structure を定義しよう。なお、以下 monoid とは、単位元をもった可換半群のことを指すものとする。

Definition 3.1 ([Kk]). X を scheme 又は analytic space とする。 X 上の log structure とは、 X 上の monoid の層 M と monoid の射 $\alpha : M \rightarrow \mathcal{O}_X$ の組 (M, α) で、 $\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times)$ が α を通じて \mathcal{O}_X^\times と同型になるもののこと。但し、 \mathcal{O}_X は X の構造層で、乗法により monoid とみる。また、scheme (resp. analytic space) X とその上の log structure (M, α) の組 (X, M, α) のことを log scheme (resp. log analytic space) という。通常は α を省略して、単に (X, M) で log scheme あるいは log analytic space を表すことが多い。また、 X を scheme 又は analytic space とする時、 $(X, \mathcal{O}_X^\times, \mathcal{O}_X^\times \hookrightarrow \mathcal{O}_X)$ により X 自身を log scheme 又は log analytic space と見なす。従って、log scheme 或いは log analytic space は通常の scheme 或いは analytic space の一般化になっている。

次に、log structure の引き戻しを定義する。

Definition 3.2 ([Kk]). $f : Y \rightarrow X$ を scheme 間の射、 (M, α) を X 上の log structure とする。 β を合成

$$f^{-1}M \xrightarrow{f^{-1}(\alpha)} f^{-1}\mathcal{O}_X \xrightarrow{f^*} \mathcal{O}_Y$$

とおく。この時、 Y への (M, α) の引き戻し $(f^*M, f^*\alpha)$ を

$$f^*M := f^{-1}M \oplus_{\beta^{-1}(\mathcal{O}_Y^\times)} \mathcal{O}_Y^\times,$$

$$f^*\alpha := \beta \oplus_{\beta^{-1}(\mathcal{O}_Y^\times)} \text{id}|_{\mathcal{O}_Y^\times}$$

で定義する。但し、 \oplus は monoid の層の圏における push-out とする。 $(f^*M, f^*\alpha)$ は Y 上の log structure を定める。Analytic space に対しても同様に log structure の引き戻しを定義する。

いくつか例を挙げよう。

Example 3.3. k を体とし、 X を k 上の smooth な代数多様体又は複素多様体とする。更に $D \subset X$ を X 内の単純正規交叉因子とする。この時、 D に associate した X の log structure (M_D, α_D) を

$$\alpha_D : M_D := j_*(\mathcal{O}_U^\times) \cap \mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X$$

で定義する。但し、ここで $U := X - D$ で、また $j : U \hookrightarrow X$ とした。

今、 $t_i (1 \leq i \leq n)$ を X の局所座標系で、 D の定義方程式が $t_1 t_2 \cdots t_m = 0$ であるとする ($m \leq n$)。すると、局所的には、 $M_D = t_1^{\mathbb{N}} t_2^{\mathbb{N}} \cdots t_m^{\mathbb{N}} \mathcal{O}_X^\times \cong \mathbb{N}^{\oplus m} \times \mathcal{O}_X^\times$ となっている。

Example 3.4. 上の例において、 $D = \sum_{i \in I} D_i$ とおく。また、 $J \subset I$ とし、 D_J を前の Section と同様に定義する。 $\iota : D_J \hookrightarrow X$ とおくと、 D_J 上の log structure $(\iota^*M_D, \iota^*\alpha)$ が定義される。

局所的に $(\iota^*M_D, \iota^*\alpha)$ がどのように表されるかを見てみよう。 $t_i (1 \leq i \leq n)$ を X の局所座標系で、 D の定義方程式が $t_1 t_2 \cdots t_m = 0$ であるとする ($m \leq n$)。更に D_J の定義方程式を $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$ とする ($r \leq m$)。すると、上の例と引き戻しの定義から、 $\iota^*M_D \cong \mathbb{N}^{\oplus r} \times \mathcal{O}_{D_J}$ で、また $\iota^*\alpha : \iota^*M_D \rightarrow \mathcal{O}_{D_J}$ はこの同型を使って

$$\begin{aligned} \iota^*\alpha((e_i, 1)) &= 0 \quad (1 \leq i \leq m) \\ \iota^*\alpha((e_i, 1)) &= \bar{t}_i \quad (m < i \leq r) \\ \iota^*\alpha((0, x)) &= x \end{aligned}$$

と表される。但し、ここで $e_i := (0, 0, \dots, \underset{i}{1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{N}^{\oplus r}$ で、また \bar{t}_i は t_i の \mathcal{O}_{D_J} における像である。

特に $I = J$ の時を考えると、 $r = m$ なので、

$$\begin{aligned} \iota^*\alpha((x, y)) &= y \text{ if } x = 0 \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned}$$

となる。

Remark 3.5. 以下 log scheme あるいは log analytic space に対して、しばしば fs (=fine and saturated) というある条件を課することがある。Fine あるいは saturated の定義は省略するが (例えば [Kf], [Kk2] 等を参照)、上の例に現れるものは fs になっている。

さて、次に log analytic space に対して、その associated topological space というものを定義する。

Definition 3.6 ([Kk-N]). Log analytic space (T, M_T, α) を, $T := \text{Spec } \mathbb{C}$ (= 一点), $\Gamma(T, M_T) := \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^1$, そして

$$\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C}; (x, y) \mapsto xy$$

で定義する. (但し, ここで $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ である.) さて, fs log analytic space (X, M) に対して, その associated topological space $(X, M)^{\log}$ を, 集合

$$\text{Hom}((T, M_T), (X, M))$$

に X および S^1 から定まる適当な位相を入れたものとして定義する. また, log structure を忘れることにより得られる射

$$(X, M)^{\log} = \text{Hom}((T, M_T), (X, M)) \longrightarrow \text{Hom}(T, X) = X$$

を $\tau_{(X, M)}$ と書く.

この $(X, M)^{\log}$ の上に構造層 $\mathcal{O}_{(X, M)}^{\log}$ を定義することもできるが, それは省略する. Log analytic space に対して, その associated topological space を対応させる対応は functorial である.

Example 3.7. 上の例の (X, M_D) (但し X は複素多様体とする) に対して, その associated topological space $(X, M_D)^{\log}$ は X に D を中心とする real blow-up を施して得られる topological space になる. また, $(D_J, \iota^* M_D)^{\log} = \tau_{(X, M_D)}^{-1}(D_J)$ となる. 特に $I = J$ の時に考えてみると,

$$\tau_{(D_I, \iota^* M_D)} : (D_I, \iota^* M_D)^{\log} \longrightarrow D_I$$

の各ファイバーは $(S^1)^{\mathbb{H}}$ と同相になっており, D_I の X 内での無限小の管状近傍を表していると考えられる.

Log analytic space は, 直感的にはこの associated topological space を表していると考えてよい. つまり, 上の例で (X, M_D) は X の D を中心とした real blow-up を表しているものであり, また, 例えば $(D_I, \iota^* M_D)$ は D_I の X 内での無限小の管状近傍を表していると考えられる. 重要なのは一般には fs log analytic space の associated topological space はそれ自体は analytic space とは限らないということである. (例えば上の例において D_I が一点になる場合, $(D_I, \iota^* M_D)^{\log}$ は S^1 のいくつかの直積になる.) にも関わらず, fs log analytic space に対しては (適当な条件の下で) 通常の analytic space と同様の理論が展開できるので, このような空間を, あたかも通常の analytic space のように扱うことが出来るのである.

また, log scheme に対しては associated topological space は定義できないが, 直感的には, log analytic space の場合の類似を考えればよい. 特に, 上の記号でいうと, 「 D_I の X 内での無限小の管状近傍」 $(D_I, \iota^* M_D)$ が代数的に考えられるということになる.

次に, log analytic space または log scheme (X, M) に対して基本群を定義しよう. ここでは簡単のため, 基点は

$$(X, M)_{\text{triv}} := \{x \in X \mid M_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$$

の点であるとする.

Definition 3.8. (1) (X, M) を log analytic space とする. また $x \in (X, M)_{\text{triv}}$ とする. この時, (X, M) の x を基点とする基本群 $\pi_1((X, M), x)$ を

$$\pi_1((X, M), x) := \pi_1((X, M)^{\log}, \tau_{(X, M)}^{-1}(x))$$

で定義する. ($\tau_{(X, M)}^{-1}(x)$ が一点であることに注意.) なお, $\text{LS}(X, M)$ を $(X, M)^{\log}$ 上の集合の局所系のなす圏とし, ω_x を $\tau_{(X, M)}^{-1}(x)$ への制限により得られる functor $\text{LS}(X, M) \rightarrow (\text{Sets})$ とすると,

$$\pi_1((X, M), x) \cong \text{Aut}(\omega_x)$$

となる.

(2) (X, M) を log scheme とする. また x を $(X, M)_{\text{triv}}$ の geometric point とする. $\text{Fet}(X, M)$ を (X, M) 上 finite, log-etale, of Kummer type な scheme (定義は省略する) のなす圏とし, ω_x を x への制限により得られる functor $\text{Fet}(X, M) \rightarrow (\text{Sets})$ とする時, (X, M) の x を基点とする代数的基本群 $\pi_1^{\text{alg}}((X, M), x)$ を

$$\pi_1^{\text{alg}}((X, M), x) := \text{Aut}(\omega_x)$$

で定義する.

なお, 次のことが知られている.

Proposition 3.9 ([Kk3]). (X, M_D) を Example 3.3の通りの log analytic space とする. この時 $x \in (X, M_D)_{\text{triv}}$ に対して

$$\pi_1((X, M_D), x) \cong \pi_1(X - D, x)$$

が成立つ. また, $X, D, (X, M_D)$ を Example 3.3の通りの log scheme, x を $(X, M_D)_{\text{triv}}$ の geometric point とするとき,

$$\pi_1^{\text{alg}}((X, M_D), x) \cong \pi_1^{\text{alg}, t}(X - D, x)$$

が成立つ. 但し, 右辺の t は D に沿って tame な代数的基本群を表す.

4. TANGENTIAL MAP と LOG SCHEME

この Section では log scheme を用いた tangential base point 及び tangential map の定義を述べる. なお, この Section では, k は標数 0 の体とする.

通常の基本群の場合と代数的基本群の場合を同時に述べたいので, 次のように Notation を定める.

- Notation 4.1.** (1) \mathcal{V}_{top} を fs log analytic space のなす圏, \mathcal{V}_{alg} を k 上の fs log scheme のなす圏とする.
 (2) $(X, M) \in \mathcal{V}_{\text{top}}$ に対して, $C_{\text{top}}(X, M) := \text{LS}(X, M)$, また $(X, M) \in \mathcal{V}_{\text{alg}}$ に対して, $C_{\text{alg}}(X, M) := \text{Fet}(X, M)$ とおく.
 (3) $*_{\text{top}}$ を $\text{Spec } \mathbb{C}$, $*_{\text{alg}}$ を geometric point とする.
 (4) $(\text{Sets})_{\text{top}}$ を集合の圏, $(\text{Sets})_{\text{alg}}$ を有限集合のなす圏とする.

さて, 以下 \bullet を top, alg のいずれかとする.

Definition 4.2. $(X, M), (Y, N) \in \mathcal{V}_{\bullet}$ に対して, $E((X, M), (Y, N))$ を

$$\{f \in \text{Hom}((X, M), (Y, N)) \mid f^* : C_{\bullet}(Y, N) \longrightarrow C_{\bullet}(X, M) \text{ が圏同値}\}$$

とおく. そして \mathcal{W}_{\bullet} を, \mathcal{V}_{\bullet} を $E((X, M), (Y, N))$ に属する射 $((X, M), (Y, N) \in \mathcal{V}_{\bullet})$ で局所化してできる圏とする.

定義より, $(X, M) \in \mathcal{V}_{\bullet}$ に対して, \mathcal{W}_{\bullet} における射 $*_{\bullet} \longrightarrow (X, M)$ があれば, functor $C_{\bullet}(X, M) \longrightarrow C_{\bullet}(*_{\bullet}) \cong (\text{Sets})_{\bullet}$ が自然に定まるので, これを基点であると思え, また $(X, M), (Y, N) \in \mathcal{V}_{\bullet}$ に対して, \mathcal{W}_{\bullet} における射 $(X, M) \longrightarrow (Y, N)$ があれば, functor $C_{\bullet}(Y, N) \longrightarrow C_{\bullet}(X, M)$ が自然に定まるので, 適当な基点 $*$ があるときに基本群の射

$$\pi_1^{\bullet}((X, M), *) \longrightarrow \pi_1^{\bullet}((Y, N), *)$$

が定まる事に注意しよう.

いよいよ tangential base point および tangential map を定義する. X を複素多様体 ($\bullet = \text{top}$ の時) または k 上の smooth な代数多様体 ($\bullet = \text{alg}$ の時) とし, $D := \sum_{i \in I} C_i \subset X$ を単純正規交叉因子とする. $U := X - D$ とおく. $J \subset I$ に対して $D_J, N_J, D_J^0, N_J^0, D_J^{\circ}, N_J^{\circ}, p : N_J \longrightarrow D_J, p^0 : N_J^0 \longrightarrow D_J^0$ を Section 2 と同様に定める. この時, 次の図式を考える.

$$N_J \xrightarrow{\rho} D_J \xhookrightarrow{\iota} X.$$

ここで ρ は zero section による埋め込みである. すると, 上の図式は次の log analytic space または log scheme の図式を導くことが容易に check できる.

$$(N_J, M_{N_J^0}) \xrightarrow{\rho} (D_J, \iota^* M_D) \xhookrightarrow{\iota} (X, M_D).$$

ここで, log structure M_J は Example 3.3 における記号である. この時, 次が成り立つ.

Proposition 4.3. ρ は圏同値

$$\rho^* : C_\bullet(N_J, M_{N'_J}) \longrightarrow C_\bullet(D_J, \iota^* M_D)$$

を導く. 即ち, $\rho \in E((D_J, \iota^* M_D), (N_J, M_{N'_J}))$ である.

この命題は, $\bullet = \text{top}$ の時は容易. $\bullet = \text{alg}$ の時は, 本質的には Abhyankar の補題に他ならない. この命題により, \mathcal{W}_\bullet における射

$$\iota \circ \rho^{-1} : (N_J, M_{N'_J}) \longrightarrow (X, M_D)$$

ができる. これを用いて, 次のように tangential base point 及び tangential map を定義する.

Definition 4.4. (1) $t : *_\bullet \longrightarrow (N_J, M_{N'_J})_{\text{triv}} \hookrightarrow (N_J, M_{N'_J})$ とする. すると \mathcal{W}_\bullet における射

$$*_\bullet \xrightarrow{t} (N_J, M_{N'_J}) \xrightarrow{\iota \circ \rho^{-1}} (X, M_D)$$

ができる. この射により t を基点とする基本群 $\pi_1^\bullet((X, M_D), t) \cong \pi_1^\bullet(U, t)$ が定義される. この基点を tangential base point という.

(2) p を自然な射影が induce する log analytic space 又は log scheme の射

$$(N_J, M_{N'_J}) \longrightarrow (D_J, M_{D'_J})$$

とする. さて, p の section $s : (D_J, M_{D'_J}) \longrightarrow (N_J, M_{N'_J})$ を与えると, \mathcal{W}_\bullet における射

$$(D_J, M_{D'_J}) \xrightarrow{s} (N_J, M_{N'_J}) \xrightarrow{\iota \circ \rho^{-1}} (X, M_D)$$

ができる. $(D_J, M_{D'_J})$ の基点 $*_\bullet \longrightarrow (D_J, M_{D'_J})$ をきめたときに上の射が定める基本群間の map

$$\pi_1^\bullet(D_J^0, *_\bullet) = \pi_1^\bullet((D_J, M_{D'_J}), *_\bullet) \longrightarrow \pi_1^\bullet((X, M_D), *_\bullet) = \pi_1^\bullet(U, *_\bullet)$$

を tangential map という.

この定義をみてもわかるとおり, tangential base point あるいは tangential map は, log scheme の立場から見ると, ある代数的な射から induce されている, と見ることができるのである.

Remark 4.5. なお, 上の例よりも一般の fs log scheme に対しても, tangential base point や tangential map が formulate できるが, それは省略する.

TANGENTIAL MAP と LOG SCHEME

REFERENCES

- [D1] P. Deligne, *Le Groupe Fondamental de la Droite Projective moins Trois Points*, in Galois Groups over \mathbb{Q} , Springer Verlag, New York, 1989.
- [F-Kk] K. Fujiwara and K. Kato, *Logarithmic Etale Topology Theory*, preprint.
- [G-M] A. Grothendieck and J. P. Murre, *The Tame Fundamental Group of a Formal Neighborhood of a Divisor with Normal Crossings on a Scheme*, Lecture Note in Math. 208, Springer Verlag, 1971.
- [I-M] Y. Ihara and M. Matsumoto, *On Galois Actions on Profinite Completions of Braid Groups*, Contemp. Math. **186**(1995), 173-200.
- [Kf] F. Kato, *Log Smooth Deformation theory*, preprint, 1995.
- [Kk] K. Kato, *Logarithmic Structures of Fontaine-Illusie*, in Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory, J-I.Igusa ed, 1988, Johns Hopkins University, pp. 191-224.
- [Kk2] K. Kato, *Logarithmic Structure of Fontaine-Illusie II — Logarithmic Flat Topology*, preprint.
- [Kk3] K. Kato, *Logarithmic Degeneration and Dieudonne Theory*, preprint.
- [Kk-N] K. Kato and C. Nakayama, *Log Betti Cohomology, Log Etale Cohomology, and Log de Rham Cohomology of Log Schemes over \mathbb{C}* , prepublications, Univ. Tokyo, UTMS 95-16.
- [M] M. Matsumoto, *Galois Representations on Profinite Braid Groups on Curves*, J. reine angew. Math. **474**(1996), 169-219.
- [S] A. Shiho, *Crystalline Fundamental Groups*, prepublications, Univ. Tokyo, UTMS 96-23.

Holomorphic maps of Riemann surfaces

MASAHARU TANABE

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology,
Ohokayama, Meguro, Tokyo, 152, Japan

Summary. We give a bound on the number of nonconstant holomorphic maps from a compact Riemann surface of genus > 1 .

1. Introduction

Let \tilde{X} be a compact Riemann surface of genus $\tilde{g} (> 1)$. Related to finiteness of the number of holomorphic maps, de Franchis [F] stated

Theorem of de Franchis. (1) *For a fixed compact Riemann surface X of genus > 1 , the number of nonconstant holomorphic maps $\tilde{X} \rightarrow X$ is finite.*

(2) *There are only finitely many compact Riemann surfaces X_i of genus > 1 which admit a nonconstant holomorphic map from \tilde{X} .*

Let $h_i : \tilde{X} \rightarrow X_i$ be a nonconstant holomorphic map ($i = 1, 2$). We say that h_1 and h_2 are isomorphic if and only if there is a conformal map $f : X_1 \rightarrow X_2$ such that $f \circ h_1 = h_2$. Let $\mathcal{I}_g(\tilde{X})$ be the set of all isomorphic classes of nonconstant holomorphic maps into compact Riemann surfaces of genus $g > 1$, and let $\mathcal{I}(\tilde{X}) = \bigcup_{\tilde{g} > g > 1} \mathcal{I}_g(\tilde{X})$. By the theorem of de Franchis, we see that $\#\mathcal{I}(\tilde{X})$ is finite. It is known that there is a bound on $\#\mathcal{I}(\tilde{X})$ depending only on \tilde{g} . Kani [K] showed that

$$\#\mathcal{I}(\tilde{X}) < (\tilde{g} - 1)2^{2\tilde{g}^2 - 2}(2^{2\tilde{g}^2 - 1} - 1).$$

Here, we will show

Theorem.

$$\#\mathcal{I}(\tilde{X}) < (2\tilde{g})^{6\tilde{g}} \times \tilde{g}(2\tilde{g} - 1)(\tilde{g} - 2).$$

2. Preliminaries

Let \tilde{X}, X be compact Riemann surfaces of genera $\tilde{g}, g (> 1)$. We denote by $H_1(X)$ the first homology group with \mathbb{Z} -coefficients of X . Any basis for $H_1(X)$ (say $\{\chi_1, \dots, \chi_{2g}\}$), with intersection matrix (that is a matrix whose (k, j) -entry is given by the intersection number $\chi_k \cdot \chi_j$),

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

will be called a canonical homology basis, where E is the $g \times g$ identity matrix.

We denote by H the space of harmonic differentials on X . For a canonical homology basis $\{\chi_1, \dots, \chi_{2g}\}$, there is a unique dual basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ ($\int_{\chi_j} \alpha_k = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, 2g$)) of H , where each α_k is real. Similarly for \tilde{X} .

Let $h : \tilde{X} \rightarrow X$ be a nonconstant holomorphic map. Then h induces a homomorphism $h_* : H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(X)$. Let $M = (m_{kj}) \in M(2g, 2\tilde{g}; \mathbb{Z})$, where $h_*(\tilde{\chi}_j) = \sum_{k=1}^{2g} m_{kj} \chi_k$. (We denote by $M(m, n; K)$ the set of $m \times n$ matrices with K -coefficients.) We will call M the matrix representation of h with respect to $\{\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_{2\tilde{g}}\}$ and $\{\chi_1, \dots, \chi_{2g}\}$. We may have another interpretation of M . Considering a equality $\int_{\tilde{\chi}_j} \alpha_k \circ h = \int_{h_*(\tilde{\chi}_j)} \alpha_k$, we may write the pull-back of α_k as

$$\alpha_k \circ h = \sum_{j=1}^{2\tilde{g}} m_{kj} \tilde{\alpha}_j.$$

Thus, we may consider M as the representation of the pull-back of harmonic differentials.

We denote by $*$ the conjugation operator, that is, for a 1-form $w = fdx + gdy$ ($z = x + iy$ is a local coordinate)

$$*w = -gdx + fdy.$$

We represent $*$ by a $2g \times 2g$ (resp. $2\tilde{g} \times 2\tilde{g}$) real matrix \mathcal{G} (resp. $\tilde{\mathcal{G}}$) with respect to the basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$ (resp. $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{2\tilde{g}}\}$) of H (resp. \tilde{H}),

$$\mathcal{G} = (g_{jk}) \quad (j, k = 1, \dots, 2g),$$

$$(\text{resp. } \tilde{\mathcal{G}} = (\tilde{g}_{jk}) \quad (j, k = 1, \dots, 2\tilde{g})),$$

that is $*\alpha_k = \sum_{j=1}^{2g} g_{jk} \alpha_j$ (resp. $*\tilde{\alpha}_k = \sum_{j=1}^{2\tilde{g}} \tilde{g}_{jk} \tilde{\alpha}_j$). It is easy to see that $\mathcal{G}^2 = -E$. Let a $2g \times 2g$ real matrix

$$\Gamma = (\gamma_{jk}) = \left(\int_X \alpha_j \wedge * \alpha_k \right) \quad (j, k = 1, \dots, 2g).$$

It is well-known that Γ is symmetric, positive definite, and $\Gamma = J\mathcal{G}$ (see e.g. [F-K, chapter 3]). Similarly for \tilde{X} .

For an arbitrary 1-form w on X , we have

$$*w \circ h = *(w \circ h).$$

For $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{2\tilde{g}}\}$ and $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}\}$, considering the matrix representation of the above equality, we obtain

$$(1) \quad M^t \tilde{\mathcal{G}} = {}^t \mathcal{G} M.$$

(${}^t \mathcal{G}$ denotes the transposition of \mathcal{G} .) Indeed,

$$*(\alpha_j \circ h) = * \left(\sum_k m_{jk} \tilde{\alpha}_k \right) = \sum_k m_{jk} * \tilde{\alpha}_k = \sum_k m_{jk} \left(\sum_{l=1}^{2\tilde{g}} \tilde{g}_{lk} \tilde{\alpha}_l \right) = \sum_l \sum_k m_{jk} \tilde{g}_{lk} \tilde{\alpha}_l,$$

and

$$*\alpha_j \circ h = \left(\sum_k g_{kj} \alpha_k \right) \circ h = \sum_k g_{kj} \left(\sum_l m_{kl} \tilde{\alpha}_l \right) = \sum_l \sum_k g_{kj} m_{kl} \tilde{\alpha}_l.$$

Since the equality $*(\alpha_j \circ h) = *\alpha_j \circ h$ holds, we have (1).

It is easy to see that the set of all $M \in M(2g, 2\tilde{g}; \mathbb{Z})$ satisfying (1) is a \mathbb{Z} -module. We denote it by $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$.

Lemma 1. *Let $D \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$. Then, we have*

$$(2) \quad D\tilde{\Gamma}^t D\Gamma^{-1} = D\tilde{J}^t D J^{-1},$$

In particular, when M is the matrix representation of a nonconstant holomorphic map $h: \tilde{X} \rightarrow X$ of degree d ,

$$(3) \quad M\tilde{\Gamma}^t M\Gamma^{-1} = M\tilde{J}^t M J^{-1} = dE.$$

Proof. Indeed,

$$D\tilde{\Gamma}^t D\Gamma^{-1} = D\tilde{J}\tilde{\mathcal{G}}^t D\Gamma^{-1} = D\tilde{J}^t D\mathcal{G}\Gamma^{-1} = D\tilde{J}^t D J^{-1}$$

since $\Gamma = J\mathcal{G} = {}^t\mathcal{G}^t J$. When M is the matrix representation of a nonconstant holomorphic map of degree d , equality $M\tilde{J}^t M J^{-1} = dE$ holds (see e.g. [Mr2],[T]). Thus, we have (3). \square

Remark. If \tilde{X} and X are conformally equivalent, there exist a matrix $M \in M(2g, 2g; \mathbb{Z})$ which satisfies formula (3) (Torelli's theorem. See e.g. [Mr1].).

Lemma 2. *Let*

$$D' = \tilde{J}^t D J^{-1} D,$$

where $D \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$. Then we have

$$(4) \quad D' {}^t\tilde{\mathcal{G}} = {}^t\tilde{\mathcal{G}} D',$$

and

$$(5) \quad D'\tilde{\Gamma}^t D'\tilde{\Gamma}^{-1} = D'\tilde{J}^t D' \tilde{J}^{-1}.$$

In particular, when $M' = \tilde{J}^t M J^{-1} M$ where M is the matrix representation of a nonconstant holomorphic map $h: \tilde{X} \rightarrow X$ of degree d , we have

$$(6) \quad M'\tilde{\Gamma}^t M'\tilde{\Gamma}^{-1} = dM'.$$

Proof. Indeed,

$$\begin{aligned} D' {}^t\tilde{\mathcal{G}} &= \tilde{J}^t D J^{-1} D {}^t\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{J}^t D J^{-1} {}^t\mathcal{G} D \\ &= \tilde{J}^t D \mathcal{G} J D = \tilde{J}\tilde{\mathcal{G}}^t D J D = {}^t\tilde{\mathcal{G}} \tilde{J}^t D J^{-1} D = {}^t\tilde{\mathcal{G}} D'. \end{aligned}$$

By the same consideration as in the case that the relation (1) holds, we have (5). When $M' = \tilde{J}^t M J^{-1} M$ where M is the matrix representation of a nonconstant holomorphic map of degree d , $M\tilde{J}^t M J^{-1} = dE$ holds and we see (6) holds by easy calculation. \square

References

- [F-K] Farkas, H.M., Kra, I., *Riemann surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [F] de Franchis, M., *Un teorema sulle involuzioni irrazionali*, Rend. Circ. Mat. Palermo **36** (1913), 368.
- [K] Kani, E., *Bounds on the number of non-rational subfields of a function field*, Invent. Math. **85** (1986), 185-198.
- [Mr1] Martens, H., *A new proof of Torelli's theorem*, Annals of Math. **78** (1963), 107-111.
- [Mr2] ———, *Mappings of closed Riemann surfaces*, Proc. of Symp. in Pure Math. **49**, Part 1 (1989), 531-539.
- [T] Tanabe, M., *On rigidity of holomorphic maps of Riemann surfaces*, Osaka J. Math. (to appear).

Diffeomorphism Types of Good Torus Fibrations with Twin Singular Fibers

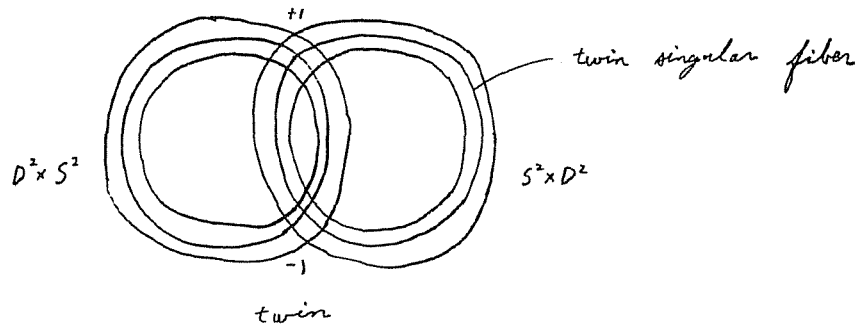
東大博士課程1年

戸田 正智

本講演の目的は, *twin singular fiber* を特異ファイバーとして持つ *good torus fibration* の構造を持ったある種の4次元微分可能多様体の微分構造を調べることにある。

twin singular fiber 及び *good torus fibration* はそれぞれ次のように定義される。

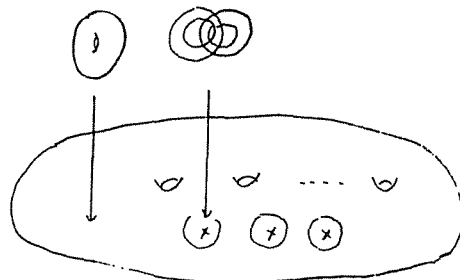
Definition *twin* とは $D^2 \times S^2$ と $S^2 \times D^2$ を2点で互いに横断的に交わらせてできる4次元の *plumbing manifold* のことである。



twin singular fiber とは, *twin* 内の $\{0\} \times S^2$ と $S^2 \times \{0\}$ の部分で, *twin* 内に滑らかに埋め込まれた2つの球面が2点で交わることができるものである。交点数はそれぞれ $+1$ と -1 である。

twin の境界は, 3次元トーラスである。また, *twin* は, *twin singular fiber* を特異ファイバーとして持つ *torus fibration* の構造を与えることができるが, その与え方は唯一通りではない。

Definition M を向きづけられた4次元微分可能多様体, B を向きづけられた2次元微分可能多様体とする。 *proper, surjective, smooth map* $f: M \rightarrow B$ が, *twin singular fiber* を持つ *good torus fibration* (GTF) であるとは, B 内にある離散点集合 Γ が存在して $f|_{f^{-1}(B-\Gamma)}: f^{-1}(B-\Gamma) \rightarrow B-\Gamma$ が $B-\Gamma$ 上の *smooth* T^2 -*bundle* であり, なおかつ, 任意の Γ 内の点 y に対して f の逆像が *twin* となるような y の近傍が存在することとする。



Theorem 全ての singular fiber が, simple twin singular fiber であつて, 1次元 Betti 数が, 奇数であるような (指数が 0 で, 底空間の種数が一般の場合の) 少なくとも 1 つの even twin singular fiber を持つ good torus fibration の全空間の微分同相類は, 全空間の Euler 数と 1次元 Betti 数, 及び, 交点形式が偶数形式か, 奇数形式かによつて決まる。

ここで, even twin singular fiber とは, twin singular fiber を構成する 2 つの球面のそれぞれの重複度の和が偶数であることを意味する。

定理の証明の概略は, 以下のとおりである。

全空間を twin のところと, そうでない T^2 -bundle のところに分解する。 T^2 -bundle の構造は, 全空間の微分構造を決定するので, g を底空間の種数とすると, 微分構造は, $2g$ 個の monodromy matrix $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g$ によつて決定される。また, twin の接着の仕方は, Waldhausen の定理により, h を twin singular fiber の本数とすると, h 個の $SL(3, \mathbb{Z})$ の元 C_1, C_2, \dots, C_h として表すことが可能なので, good torus fibration の全空間の微分構造は, $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_g, B_g, C_1, C_2, \dots, C_h$ によつて表すことが可能である。ここで注意すべきことは, 異なる行列であつても同じ微分構造を表す行列の組があるということである。この ambiguity を消していくことがこの定理の証明の戸針である。勿論, それは容易なことではないが, 1次元 Betti 数が奇数であるという条件がそれを可能にした。その条件は例えば $\text{rank}(A_1 - E, B_1 - E, A_2 - E, B_2 - E, \dots, A_g - E, B_g - E) = 1$ というように, 行列の可能性を著しく制限してしまうのである。そうした考察の結果, 全空間の微分構造は Euler 数 $2h$, 1次元 Betti 数 $2g+1$, 交点形式 という位相不変量によつて決定されることがわかる。

参項文献

- [1] Z. Iwase : Good torus fibrations with twin singular fibers, Japan. J. Math., 10 (1985), 321-352
- [2] Y. Matsumoto : Diffeomorphism types of elliptic surfaces, Topology 25, (1986), 549-563
- [3] B. Moishezon : Complex Surfaces and Connected Sums of Complex Projective Planes, Springer, Berlin (1977).

WEIL-PETERSSON AREA OF THE MODULI SPACE OF TORUS WITH ONE BRANCH POINT

MARJATTA NÄÄTÄNEN AND TOSHIHIRO NAKANISHI

ABSTRACT. We employ L -length coordinates to study the Teichmüller space of torus with one branch point of order ν . Applying the results for the corresponding moduli space we find that the Weil-Petersson area of the moduli space of torus with one branch point of order ν is $\frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)$.

0. Introduction. The Teichmüller space $T(1, \nu)$ (ν is an integer ≥ 2) of torus with one branch point of order ν admits several global coordinate-systems. For example, as the Teichmüller space of pointed torus, $T(1, \nu)$ is identified with the upper half plane $\mathbb{H} = \{z = x + iy : y > 0\}$ with presentation of the mapping class group $MC_{1,1}$ in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. A Fuchsian group $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ with signature $(1, \nu)$ is generated by two hyperbolic transformations A and B with $ABA^{-1}B^{-1}$ elliptic. Then the traces $x = \mathrm{tr} A, y = \mathrm{tr} B$ and $z = \mathrm{tr} AB$ can be employed as coordinates for $T(1, \nu)$; then $T(1, \nu)$ is the sublocus of $x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 4 \sin^2(\pi/2\nu)$ satisfying $x, y, z > 2$.

The objective of this paper is to compute the Weil-Petersson area of the moduli space $M(1, \nu) = T(1, \nu)/MC_{1,1}$. We first investigate L -length coordinate-systems associated with triangulations of the pointed torus. L -length coordinates are useful in this context, since an L -length coordinate-system expresses the Teichmüller space as a real-algebraic surface. Moreover, there is an explicit description of a fundamental domain for the action of the mapping class group $MC_{1,1}$. Since an L -length is a hyperbolic geometric quantity, the transformation formula between an L -length coordinate-system and a Fenchel-Nielsen coordinate-system is established. We use an expression of the Weil-Petersson area form in Fenchel-Nielsen coordinates derived by Wolpert [11, p. 252] to finally obtain that the area of $M(1, \nu)$ is $(\pi^2/6)(1 - \nu^{-2})$.

1. Elementary Formulae.

1.1. L -lengths. Let $\mathbb{H} = \{z = x + iy : y > 0\}$ be the hyperbolic plane equipped with the metric $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$. For a geodesic segment $c \subset \mathbb{H}$ with endpoints p and q , we define the L -length $L(c) > 0$ of c by

$$(1.2) \quad L(c)^2 + 1 = \cosh d(p, q) = \frac{|p - q|^2}{2\mathrm{Im}(p)\mathrm{Im}(q)} + 1,$$

where $d(p, q)$ denotes the hyperbolic distance between p and q .

Let T be a geodesic triangle. Suppose that T has vertices labelled a, b and c : the edges opposite these vertices have L -lengths L_a, L_b and L_c , respectively

and the interior angles at the vertices are α, β and γ . Then the angle sum of T satisfies

$$(1.3) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{L_a^2 L_b^2 L_c^2 - (L_a^4 + L_b^4 + L_c^4) - 4(L_a^2 + L_b^2 + L_c^2) - 8}{(L_a^2 + 2)(L_b^2 + 2)(L_c^2 + 2)}.$$

See [5, (1.5)]. We need the following lemma later to describe the Fenchel-Nielsen deformation of a hyperbolic surface.

1.4. Lemma. *Let $s \in \mathbb{R}$ and $0 < \alpha < \pi$. If $z = x + iy \in \mathbb{H}$ is such that $x > 0$ and z lies on the circle $C = \{x^2 - 2(\cot \alpha)x + y^2 = 1\}$, then $u = \cosh d(z, i)$ and $u_s = \cosh d(e^s z, i)$ satisfy*

$$(1.5) \quad u_s = u \cosh s + \sqrt{u^2 - 1} \cos \alpha \sinh s.$$

Proof. Since $x^2 + y^2 = 2(\cot \alpha)x + 1$, we have

$$u = \cosh d(z, i) = \frac{|z - i|^2}{2\operatorname{Im}(z)} + 1 = \frac{x \cot \alpha + 1}{y}.$$

Solving for y and substituting in $x^2 - 2(\cot \alpha)x + y^2 = 1$ gives by our assumption $x > 0$ that

$$x = \frac{\sin \alpha (\cos \alpha (u^2 - 1) + u \sqrt{u^2 - 1})}{\sin^2 \alpha (u^2 - 1) + 1}.$$

Consequently,

$$(1.6) \quad y = \frac{u + \sqrt{u^2 - 1} \cos \alpha}{(u^2 - 1) \sin^2 \alpha + 1}.$$

Now (1.5) is obtained from (1.6) and

$$u_s = \cosh d(e^s z, i) = \frac{(e^s x)^2 + (e^s y - 1)^2}{2e^s y} + 1 = e^s u - \frac{\sinh s}{y}.$$

2. Teichmüller space of torus with one branch point.

2.1. Definition. Let $F_{1,1}$ denote an oriented torus with one distinguished point p . In this paper we shall be concerned with Fuchsian groups with signature $(1, \nu)$. A Fuchsian group Γ has signature $(1, \nu)$ if the factor surface \mathbb{H}/Γ is a torus and the canonical projection $\pi_\Gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ is branched over a single point with order ν . A marking f_* of Γ is defined as the isotopy class of an orientation-preserving homeomorphism $f : F_{1,1} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma$ such that $f(p)$ is the branch point. The pair (Γ, f_*) is called a marked Fuchsian group with signature $(1, \nu)$. Two marked Fuchsian groups (Γ_1, f_{1*}) and (Γ_2, f_{2*}) with signature $(1, \nu)$ are *equivalent* if there is a conformal mapping $h : \mathbb{H}/\Gamma_1 \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_2$ satisfying $(hf_1)_* = f_{2*}$. The *Teichmüller space* $\mathbb{T}(1, \nu)$ is the set of equivalence classes $[\Gamma, f_*]$ of marked Fuchsian groups with signature $(1, \nu)$.

2.2. L -length coordinates for the Teichmüller space $T(1, \nu)$. Let $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ be a triangulation of $F_{1,1}$ by simple loops c_1, c_2 and c_3 based at p . Given a point $R_* = [\Gamma, f_*]$ of $T(1, \nu)$, we can choose a homeomorphism f representing the isotopy class f_* relative to $\{p\}$ so that $f(c_1), f(c_2)$ and $f(c_3)$ are geodesic loops on \mathbb{H}/Γ . Let L_1, L_2 and L_3 denote the L -lengths of the corresponding geodesic loops. Thus, if the hyperbolic lengths of $f(c_1), f(c_2)$ and $f(c_3)$ are l_1, l_2 and l_3 , then $L_i^2 + 1 = \cosh l_i$, $i = 1, 2, 3$. The mapping

$$\varphi_\Delta : T(1, \nu) \rightarrow \mathbb{R}_+^3, \quad \varphi_\Delta(R_*) = (L_1, L_2, L_3)$$

is injective and hence these L -length coordinates give a global parametrization of the Teichmüller space $T(1, \nu)$, see [5, Proposition 2.1]. The geodesic loops $f(c_1), f(c_2)$ and $f(c_3)$ decompose \mathbb{H}/Γ into two congruent geodesic triangles. The sum of interior angles of each triangle is π/ν . Hence, by using (1.3) we can specify the image of $T(1, \nu)$ under φ_Δ . In order to express this image concisely, we introduce another coordinate-system:

$$\psi_\Delta : T(1, \nu) \rightarrow \mathbb{R}_+^3, \quad \psi_\Delta(R_*) = (x, y, z),$$

where

$$(2.3) \quad x = \sqrt{(L_1^2 + 2)/2}, y = \sqrt{(L_2^2 + 2)/2} \text{ and } z = \sqrt{(L_3^2 + 2)/2}.$$

Geometrically this means that

$$(2.4) \quad x = \cosh(l_1/2), y = \cosh(l_2/2) \text{ and } z = \cosh(l_3/2).$$

There exists a unique totally geodesic simple loop γ_1 on \mathbb{H}/Γ freely homotopic to $f(c_1)$. (Note that this fact is proper to the case of signature $(1, \nu)$.) Let $l(\gamma_1)$ denote the length of γ_1 and set $t_1 = 2 \cosh(l(\gamma_1)/2)$. Similarly we define t_2 and t_3 . Then, by [2, Theorem 7.17.1. (ii)] (see also [6, Lemma 4.4].)

$$(2.5) \quad x = \frac{t_1}{2 \sin \frac{\pi}{2\nu}}, y = \frac{t_2}{2 \sin \frac{\pi}{2\nu}}, z = \frac{t_3}{2 \sin \frac{\pi}{2\nu}}.$$

We have therefore that $x, y, z > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\nu}}$. Substituting (2.3) in (1.3) gives that the image $\psi_\Delta(T(1, \nu))$ in $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$ is expressed by

$$(2.6) \quad 2 \sin\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Each ray in \mathbb{R}_+^3 emanating from the origin meets the locus of (2.6) twice and the locus of (2.6) has two components in \mathbb{R}_+^3 . The equation $2 \sin(\pi/(2\nu))\xi^3 - 3\xi^2 + 1 = 0$ has two positive roots $\xi_0 < 1/\sin(\pi/(2\nu))$ and $\xi_1 > 1/\sin(\pi/(2\nu))$ and hence the ray $x = y = z$ meets the locus of (2.6) in the points (ξ_1, ξ_1, ξ_1) and (ξ_0, ξ_0, ξ_0) . Since the latter point fails to satisfy (2.5), we know that the component which is entirely contained in $\{(x, y, z) : x > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\nu}}, y > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\nu}}, z > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2\nu}}\}$ represents the Teichmüller space $T(1, \nu)$.

2.7. A cell decomposition of $T(1, \nu)$. In what follows, when we say that $h : F_{1,1} \rightarrow F_{1,1}$ is a homeomorphism, we always assume that h fixes the distinguished point, $h(p) = p$. Originally the mapping class group $MC_{1,1}$ is the group of isotopy classes of orientation preserving self-homeomorphisms of $F_{1,1}$. However,

its action on the Teichmüller space $\mathbb{T}(1, \nu)$ is not effective, because the subgroup N generated by the hyperelliptic involution fixes every point of $\mathbb{T}(1, \nu)$. In this paper we call $MC_{1,1}/N$ the mapping class group and denote it again by $MC_{1,1}$.

In this paragraph we consider a cell decomposition of $\mathbb{T}(1, \nu)$ which is left invariant under the action of the mapping class group $MC_{1,1}$. We omit the details and refer to [5, Chapter 4] and also [7], [8] and [9] from which the basic ideas come. We continue to use the notation in 2.2. We say that a triple of positive numbers (L_1, L_2, L_3) satisfies the *face condition* if the following three inequalities hold:

$$L_i^2 < L_j^2 + L_k^2, \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

(Note that these inequalities are the face condition described in [9] and [5] for the case of signature $(1, \nu)$.) For a triangulation Δ , we define

$$C(\Delta) = \{R_* \in \mathbb{T}(1, \nu) : \varphi_\Delta(R_*) \text{ satisfies the face condition.}\}$$

We shall see in 2.9 that for any triangulation, $C(\Delta)$ is a two dimensional cell and its closure $\overline{C(\Delta)}$ in $\mathbb{T}(1, \nu)$ is homeomorphic to the closed disc deleted three boundary points.

Let c_1, c_2 and c_3 denote loops representing $(1, 0), (0, 1)$ and $(1, 1)$ of $\pi_1(F_{1,1}, p) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, respectively. Then $\Delta = (c_1, c_2, c_3)$ is a triangulation of $F_{1,1}$. It is easy to see that in our particular case $F_{1,1}$ any triangulation is the image of Δ under an orientation-preserving self-homeomorphism of $F_{1,1}$. Then, by [5, Proposition 4.2.3] we obtain an $MC_{1,1}$ -invariant cell decomposition:

$$(2.8) \quad \mathbb{T}(1, \nu) = \cup_{h_* \in MC_{1,1}} h_*(\overline{C(\Delta)}).$$

Here, the $MC_{1,1}$ -invariance is a consequence of the equality $h_*(C(\Delta)) = C(h(\Delta))$, where h is a homeomorphism representing the isotopy class $h_* \in MC_{1,1}$.

2.9. For the rest of this paper we identify $\mathbb{T}(1, \nu)$ with $\psi_\Delta(\mathbb{T}(1, \nu)) \subset \mathbb{R}_+^3$, where the triangulation Δ is defined above. The face condition introduced in 2.7 is expressed as follows: $L_1^2 + L_2^2 > L_3^2$ is the same as $x^2 + y^2 > z^2 + 1$. When (2.6) is viewed as a quadratic equation in z , the last inequality obliges its root to be

$$(2.10) \quad z = \sin\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)xy - \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1},$$

and hence we must have

$$(2.11) \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \geq 0.$$

Next $L_1^2 + L_3^2 > L_2^2$ is the same as $x^2 + z^2 > y^2 + 1$. This and (2.10) yield

$$(2.12) \quad y < \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)x^2 - 1}}.$$

Similarly we obtain from $L_2^2 + L_3^2 > L_1^2$ or $y^2 + z^2 > x^2 + 1$ that

$$(2.13) \quad x < \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)y\sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)y^2 - 1}}$$

and the set

$$C(\Delta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : (x, y, z) \text{ satisfies (2.10) - (2.13)}\}$$

projects injectively to a domain Ω in the x, y -plane. This region Ω is depicted in Figure 2.1. From this figure, we see that $C(\Delta)$ is homeomorphic to the closed disc with three boundary points deleted.

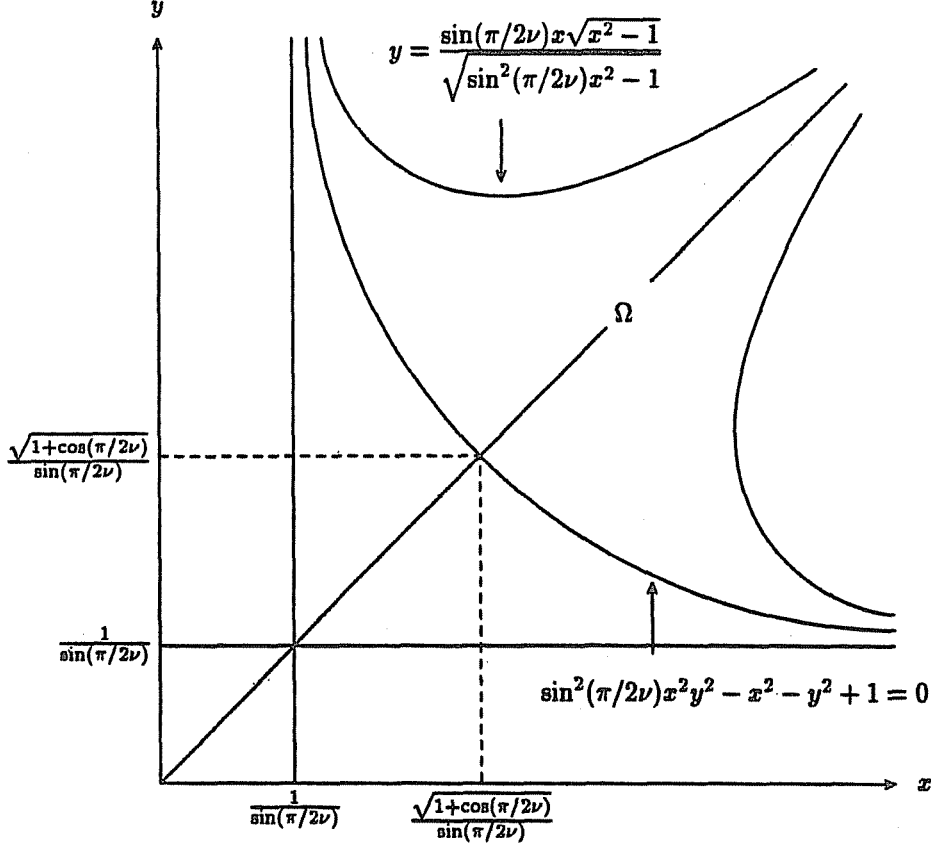


Figure 2.1

2.14. Presentation of the mapping class group $MC_{1,1}$. In what follows we use the isomorphism $\pi_1(F_{1,1}, p) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. An element ω_* of $MC_{1,1}$ induces an isomorphism of $\pi_1(F_{1,1}, p)$ onto itself and, if $\omega_*(1, 0) = (a, c)$ and $\omega_*(0, 1) = (b, d)$, we obtain the matrix representation $\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ of ω_* . This correspondence gives the classical isomorphism $MC_{1,1} \cong \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. We consider the following orientation-preserving self-homeomorphisms of $F_{1,1}$: ω_1 is the Dehn twist map ([1, pp. 92-93]) formed by splitting $F_{1,1}$ along a simple loop in $F_{1,1} \setminus \{p\}$ freely homotopic to the $(1, 0)$ -loop and regluing after a rotation of 2π , and ω_2 is the Dehn twist map formed similarly along a simple loop freely homotopic to the $(0, 1)$ -loop. The rotations are given in such a way that the matrix representations of ω_{1*} and ω_{2*} become:

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then ω_{1*} and ω_{2*} generate $MC_{1,1}$. On the other hand ω_{1*} and ω_{2*} act on $\mathbf{T}(1, \nu)$ in the following manner:

$$(2.15) \quad \omega_{1*}(x, y, z) = (x, z, \tilde{y}) \quad \omega_{2*}(x, y, z) = (z, y, \tilde{x}),$$

where \tilde{x} and \tilde{y} are defined by $x + \tilde{x} = 2 \sin(\pi/(2\nu))yz$ and $y + \tilde{y} = 2 \sin(\pi/(2\nu))xz$, see (2.6). We define $\alpha_* = \omega_{2*}\omega_{1*}^{-1}\omega_{2*}$ and $\beta_* = \omega_{2*}^{-1}\omega_{1*}$. Then they act on $\mathbf{T}(1, \nu)$ in the following manner:

$$\alpha_*(x, y, z) = (y, x, \tilde{z}) \quad \beta_*(x, y, z) = (y, z, x),$$

where $z + \tilde{z} = 2 \sin(\pi/(2\nu))xy$. An elliptic element in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ has order 2 or 3. This means that each point of $\mathbf{T}(1, \nu)$ has the isotropic group of order at most 3 for the action of $MC_{1,1}$. We use this fact in the proof of the following lemma.

2.16. Lemma. *Let $G = \{h_* \in MC_{1,1} : h_*(C(\Delta)) = C(\Delta)\}$ be the stabilizer of $C(\Delta)$ in $MC_{1,1}$. Then G is the cyclic group of order 3 generated by β_* .*

Proof. First we show that G is a finite group. Let $p_1 = (\xi_1, \xi_1, \xi_1) \in C(\Delta)$, where ξ_1 is the largest root of the equation $2 \sin(\pi/(2\nu))\xi^3 - 3\xi^2 + 1 = 0$, and let R be its underlying hyperbolic surface. Suppose that G is an infinite group. Then $G(p_1) = \{h_*(p_1) : h_* \in G\}$ is an infinite set, because each point of $G(p_1)$ is fixed by at most three elements of G . Due to the discontinuous action of $MC_{1,1}$, $G(p_1)$ has no accumulation points in $\overline{C(\Delta)}$. ($\overline{C(\Delta)}$ is the closure of $C(\Delta)$ in $\mathbf{T}(1, \nu)$.) We choose an infinite sequence $p_n = h_{n*}(p_1)$, $h_{n*} \in G$, ($n = 2, 3, \dots$). By replacing p_n by $\beta_*(p_n)$ or by $\beta_*^2(p_n)$, if necessary, we assume that $x_n \leq y_n, x_n \leq z_n$ for $p_n = (x_n, y_n, z_n)$. Then $x_n \rightarrow 1/\sin(\pi/(2\nu))$ as $n \rightarrow \infty$, see Figure 2.1. We may assume that $x_n > x_{n+1}$ and hence $h_n(c_1)$ and $h_{n+1}(c_1)$ are not freely homotopic. Let γ_n denote the totally geodesic simple loop on R freely homotopic to $h_n(c_1)$. Then, by (2.5) its length converges to zero as $n \rightarrow \infty$. Then for n sufficiently large, γ_n and γ_{n+1} are disjoint due to the collar lemma [3]. However it is impossible to find a pair of disjoint simple closed geodesic loops on R . This contradiction concludes that G is a finite group. By the Nielsen realization theorem [4], there exists a point of $\mathbf{T}(1, \nu)$ fixed by all elements of G . Hence the order of G is at most three. Since G contains β_* , we conclude that $G = \{1, \beta_*, \beta_*^2\}$.

3. The Weil-Petersson area form of the moduli space.

3.1. The Fenchel-Nielsen deformation. For two points $P, Q \in \mathbb{H}$, we shall denote by \overline{PQ} the hyperbolic segment connecting P and Q . Let \mathcal{F} be the closed geodesic quadrilateral in \mathbb{H} with vertices in $O = i, A = e^{l/2}i, B = e^{l/2}(\cosh \frac{l}{2} \cos \theta + i\sqrt{1 - (\cosh(l/2) \cos \theta)^2})$ and $C = e^{i\theta}$, where $l > 0$ and $0 < \theta < \pi/2$ with

$$(3.2) \quad \tan \theta \cos\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) = \sinh(l/2).$$

See Figure 3.1. By this condition the interior angle of \mathcal{F} at B equals $\pi/(2\nu)$ and all other interior angles are $\pi/2$. We define the following hyperbolic isometries: $V_2(z) = -\bar{z}, V_3(z) = -1/z$ and $V_4(z) = 1/\bar{z}$. For a real number s , let \mathcal{D}_s be the geodesic quadrilateral which has vertices defined by $B_{1,s} = e^{s/2}B, B_{2,s} = e^{-s/2}V_2(B), B_{3,s} = e^{-s/2}V_3(B)$ and $B_{4,s} = e^{s/2}V_4(B)$. See Figure 3.1. Then

there are conformal isometries α_s and β_s of \mathbb{H} such that α_s sends the edge $\overline{B_{3,s}B_{4,s}}$ to the edge $\overline{B_{2,s}B_{1,s}}$, and β_s sends $\overline{B_{2,s}B_{3,s}}$ to $\overline{B_{1,s}B_{4,s}}$. We remark that $\mathcal{D}_0 = \mathcal{F} \cup V_2(\mathcal{F}) \cup V_3(\mathcal{F}) \cup V_4(\mathcal{F})$ and that α_0 and β_0 generate a Fuchsian group Γ_0 with signature $(1, \nu)$ by Poincaré's theorem [2, Section 9.8]. The group Γ_s generated by α_s and β_s is also a Fuchsian group of the same signature and called the *Fenchel-Nielsen deformation* of Γ_0 along the geodesic loop $\pi_{\Gamma_0}(\overline{AV_3(A)})$ on \mathbb{H}/Γ_0 . Since $E_s = \{\alpha_s, \beta_s\}$ is a canonical system of generators, the pair (Γ_s, E_s) defines a point of the Teichmüller space $\mathcal{T}(1, \nu)$, see [12, Definition 3.25]. The Fenchel-Nielsen coordinates of the class $[\Gamma_s, \{\alpha_s, \beta_s\}]$ are (l, s) . The Fenchel-Nielsen coordinate-system gives a global parametrization of the Teichmüller space $\mathcal{T}(1, \nu)$. A detailed description of the Fenchel-Nielsen deformation can be found in [1, Section (3.2)].

We want to establish the transformation rule between the Fenchel-Nielsen coordinates and the L -length coordinates. We identify $F_{1,1}$ with \mathbb{H}/Γ_0 and the distinguished point p with $\pi_{\Gamma_0}(B_{1,0})$. We proceed with the triangulation $c_1 = \pi_{\Gamma_0}(\overline{B_{1,0}B_{4,0}})$, $c_2 = \pi_{\Gamma_0}(\overline{B_{1,0}B_{2,0}})$, $c_3 = \pi_{\Gamma_0}(\overline{B_{1,0}B_{3,0}})$.

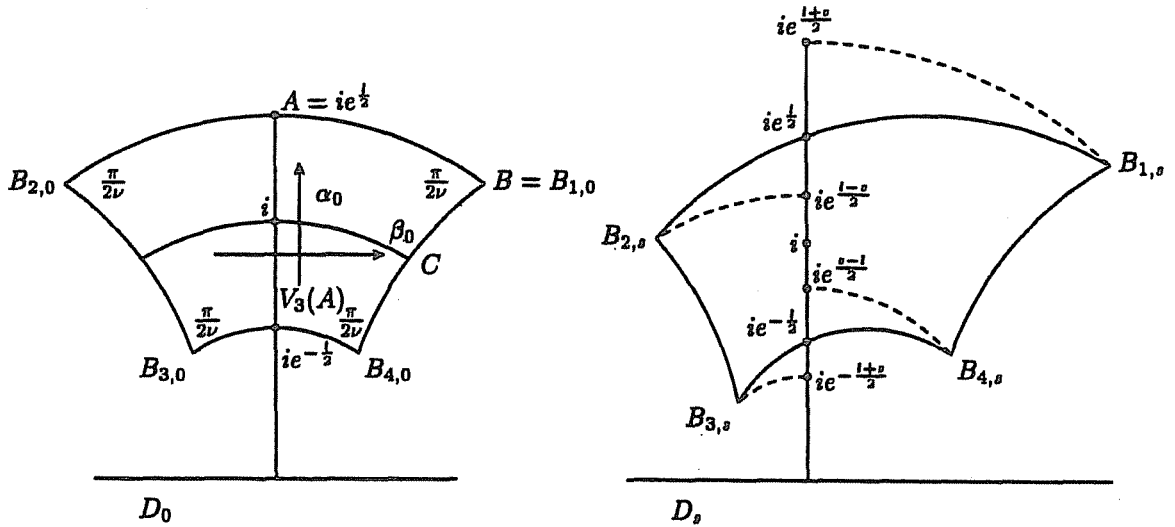


Figure 3.1

Let $(x(l, s), y(l, s), z(l, s))$ be the point of $\mathcal{T}(1, \nu)$ corresponding to the Fenchel-Nielsen coordinates (l, s) . Then $x(l, s) = x(l, 0)$. Let $x = x(l, s)$. By (2.4) and (3.2)

$$x = \cosh d(B, C) = \frac{|B - C|^2}{2\operatorname{Im}(B)\operatorname{Im}(C)} + 1 = \frac{\cosh \frac{l}{2} \cos \theta}{\sqrt{1 - (\cosh \frac{l}{2} \cos \theta)^2}}.$$

Solving for $l/2$ gives

$$(3.3) \quad \frac{l}{2} = \log \left(\sin\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)x + \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)x^2 - 1} \right).$$

Let $y_0 = y(l, 0)$ and $y = y(l, s)$. Then by (2.4) and (3.2)

$$y_0 = \cosh d(A, B) = \frac{|A - B|^2}{2e^{l/2} \operatorname{Im}(B)} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (\cosh \frac{l}{2} \cos \theta)^2}}.$$

Hence

$$(3.4) \quad y_0^2 = \frac{x^2 - 1}{\sin^2(\frac{\pi}{2\nu})x^2 - 1}.$$

Since $B_{1,s} = e^{s/2} B_{1,0}$, by applying (1.5) with $\alpha = \pi/2$, we obtain $y = \cosh(s/2)y_0$. Hence $s/2 = \log(y/y_0 + \frac{s}{|s|} \sqrt{(y/y_0)^2 - 1})$ and then from (3.4)

$$(3.5) \quad \frac{s}{2} = \log \left(y + \frac{s}{|s|} \sqrt{\frac{\sin^2(\frac{\pi}{2\nu})x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}{\sin^2(\frac{\pi}{2\nu})x^2 - 1}} \right) - \log y_0.$$

3.6. The Weil-Petersson area of moduli spaces. The Weil-Petersson area form is expressed as $d\omega_{WP} = dl \wedge ds$ in the Fenchel-Nielsen coordinates. From (3.3) and (3.5) we obtain

$$(3.7) \quad d\omega_{WP} = \frac{4 \sin(\frac{\pi}{2\nu}) dx dy}{\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2\nu})x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}}.$$

at a point where x and y supply local coordinates. We can verify directly by computation using (2.15) that this area form is invariant under the action of $MC_{1,1}$.

We use the $MC_{1,1}$ -invariant cell decomposition (2.8) in order to find the Weil-Petersson area $v_{1,\nu}$ of the moduli space $M(1, \nu) = \mathbb{T}(1, \nu)/MC_{1,1}$. By Lemma 2.16, the stabilizer $\{h_* \in MC_{1,1} : h_*(C(\Delta)) = C(\Delta)\}$ is generated by β_* of order 3. Hence, from the $MC_{1,1}$ -invariance of the area form,

$$v_{1,\nu} = \frac{1}{3} \int_{C(\Delta)} d\omega_{WP}.$$

Let Ω be the domain depicted in Figure 2.1. Since both Ω and the area form (3.7) are symmetric with respect to x and y ,

$$v_{1,\nu} = \frac{2}{3} \int_{\Omega \cap \{y > x\}} \frac{4 \sin(\frac{\pi}{2\nu}) dx dy}{\sqrt{\sin^2(\frac{\pi}{2\nu})x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1}}.$$

In what follows, we write θ in place of $\pi/(2\nu)$ for the sake of simplicity. Then

$$\begin{aligned} v_{1,\nu} &= \frac{8 \sin \theta}{3} \int_{1/\sin \theta}^{\sqrt{1+\cos \theta}/\sin \theta} \left(\int_{\sqrt{x^2-1}/\sqrt{(\sin \theta x)^2-1}}^{\sin \theta x \sqrt{x^2-1}/\sqrt{(\sin \theta x)^2-1}} \frac{dy}{\sqrt{(\sin \theta)^2 x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1}} \right) dx \\ &\quad + \frac{8 \sin \theta}{3} \int_{\sqrt{1+\cos \theta}/\sin \theta}^{\infty} \left(\int_x^{\sin \theta x \sqrt{x^2-1}/\sqrt{(\sin \theta x)^2-1}} \frac{dy}{\sqrt{(\sin \theta)^2 x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1}} \right) dx. \end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned} \frac{3}{8}v_{1,\nu} &= \int_1^{\sqrt{1+\cos\theta}} \frac{\log(x + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &+ \int_{\sqrt{1+\cos\theta}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \log \left(\frac{(x + \sqrt{x^2-1})\sqrt{x^2-1 + (\cos\theta)^2}}{x\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x^2-1)^2 - (\cos\theta)^2}} \right) dx. \end{aligned}$$

In order to evaluate the above integral, we view the sum of the integrals in the right-hand side as a function $F(\theta)$ of a continuous parameter θ ($0 < \theta < \pi/2$). Then

$$\begin{aligned} F'(\theta) &= - \int_{\sqrt{1+\cos\theta}}^{\infty} \frac{x \cos \theta \sin \theta}{((x^2-1) + \cos^2 \theta) \sqrt{(x^2-1)^2 - \cos^2 \theta}} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin \theta dt}{(1+t \cos \theta) \sqrt{1-t^2}} \\ &= -\frac{\sin \theta}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1 + \cos \theta \cos \varphi} = -\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Since $F(\theta) \rightarrow 0$ as $\theta \rightarrow \pi/2$,

$$F(\theta) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\theta^2}{4}.$$

Therefore we conclude that

$$v_{1,\nu} = \frac{8}{3} F\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) = \frac{\pi^2}{6} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right).$$

The Weil-Petersson area of the moduli space of once-punctured torus is obtained as the limit

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} v_{1,\nu} = \frac{\pi^2}{6}.$$

See [11] and [10].

REFERENCES

- [1] W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Springer Lecture Notes in Math., 820, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [2] A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Math. 91, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.
- [3] L. Keen, Collars on Riemann surfaces, *Ann. of Math. Stud.* 66 (1971), 205–224.
- [4] S.P. Kerckhoff, The Nielsen realization problem, *Ann. of Math.* 117 (1983), 235–265.
- [5] T. Nakanishi and M. Näätänen, The Teichmüller space of a punctured surface represented as a real algebraic space, *Michigan Math. J.* 42 (1995), 235–258.
- [6] T. Nakanishi and M. Näätänen, Parametrization of Teichmüller space by length parameters, to appear in *Analysis and Topology* (C. Andreian-Cazacu, O. Lehto and Th. M. Rassias, eds.) World Scientific, Singapore.
- [7] M. Näätänen, A cellular parametrization for closed surfaces with a distinguished point, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.* 18 (1993), 45–64.

- [8] M. Näätänen and R.C. Penner, A convex hull construction for compact surfaces and the Dirichlet polygon, *Bull. London Math. Soc.* **23** (1991), 56–574.
- [9] R.C. Penner, The decorated Teichmüller space of punctured surfaces, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987), 299–339.
- [10] R.C. Penner, Weil-Petersson volumes, *J. Differential Geometry*, **35** (1992), 559–608.
- [11] S. Wolpert, On the Kähler form of the moduli space of once punctured tori, *Comment. Math. Helv.*, **58** (1983), 246–256.
- [12] H. Zieschang, *Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces*, Springer Lecture Notes in Math. **875**, Springer-Verlag, 1981.

UNIVERSITY OF HELSINKI, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, P.O.Box 4 (Yliopistonkatu 5), SF-00014 UNIVERSITY OF HELSINKI, FINLAND
E-mail address: mnaatanen@cc.helsinki.fi

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SHIZUOKA UNIVERSITY, SHIZUOKA 422, JAPAN
E-mail address: smtnaka@sci.shizuoka.ac.jp

On certain non-congruence subgroups of the Teichmüller modular group of genus two obtained from the Jones representation

Masanori Morishita¹

We give a family of “non-congruence” normal subgroups of the Teichmüller modular group of genus two with finite unitary groups as quotients, by confirming a conjecture, posed by Takayuki Oda, on the image of the reduction of the specialized Jones representation at a root of unity. In the following, I give just an indication of the proof. For the details, we refer to [M].

Introduction

One of the fundamental objects in the classical theory of automorphic functions is the moduli space of elliptic curves, that is the quotient of the complex upper half plane by the elliptic modular group $SL_2(\mathbf{Z})$. A higher dimensional generalization of this space is the moduli space of principally polarized abelian varieties, that is the quotient of the Siegel upper half space by the Siegel modular group $Sp_g(\mathbf{Z})$. On the other hand, if we go in the direction of curves of higher genus, the moduli space is the Teichmüller modular space, that is the quotient of the Teichmüller space by the Teichmüller modular group or mapping class group. So, we see that the Teichmüller modular group Γ_g of genus g plays an analogous role to the Siegel modular group or more general arithmetic groups. We note, however, that our knowledge about group theoretic or arithmetic properties of Γ_g , $g \geq 2$, is much less than those of arithmetic subgroups. A well-known property the group $Sp_g(\mathbf{Z})$ ($g \geq 2$) enjoys is the congruence subgroup property. Namely, any subgroup of finite index of $Sp_g(\mathbf{Z})$ contains a principal congruence subgroup. Owing to the Nielsen isomorphism, we can also define “principal congruence

¹Partly supported by Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists, Ministry of Education, Science and Culture, Japan

subgroups" of Γ_g , $g \geq 2$. Then, our main result of this paper tells us that Γ_2 has a family of non-congruence normal subgroups with finite unitary groups as quotients. We show it by confirming a conjecture, posed by Takayuki Oda, on the image of the reduction of the specialized Jones representation Γ_2 at a root of unity.

To this end, let us mention some related works. Oda-Terasoma [O-T] studied the similar problem for the Burau representations of braid groups. Our method of result and proof are suggested by those of them. Using the results of [O-T], Berger [B] introduced certain non-congruence subgroups of $PSL_2(\mathbf{Z})$ and studied some geometric properties of the associated modular curves as Galois coverings over the projective line. Similarly, in our case, it would be interesting to study the associated tower of 3-folds over the moduli space of curves of genus 2, using their large Galois groups. Finally, as in the "classical" theory of automorphic functions, we hope that our result would have an application to the theory of the Teichmüller modular forms to be built in the future (cf. [I], [K] etc).

Acknowledgement. I would like to thank Takayuki Oda for explaining his conjecture and problems related to the moduli space of curves and useful discussions. My thanks also go to Eiichi Bannai for supplying some ideas in the proof of the main theorem 4.1.

Notation. For an associative ring R with identity, $M_n(R)$ denotes the total matrix algebra over R of degree n , and $GL_n(R)$ denotes the group of invertible elements of $M_n(R)$. We write R^\times for $GL_1(R)$. For $A \in M_n(R)$, tA , $tr(A)$, and $det(A)$ stand for the transpose, trace, and determinant of A , respectively.

1. The Jones representation of the Teichmüller modular group of genus 2 and its unitarity

In [J], Jones attached to each Young diagram with n tiles a Hecke algebra representation of the braid group B_n on n strings. As was shown in [ibid, Section 10], the representation of B_6 corresponding to the rectangular Young diagram $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ factors through the Teichmüller modular group Γ_2 of genus 2, namely, the mapping class group of a closed orientable surface of genus 2. It is known that Γ_2 admits the following presentation ([Bi2], Theorem 4.8, p 183-4).

generators: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$.

defining relations:

$$\begin{cases} \theta_i \theta_{i+1} \theta_i = \theta_{i+1} \theta_i \theta_{i+1} \quad (1 \leq i \leq 4), \\ \theta_i \theta_j = \theta_j \theta_i \quad (|i-j| \geq 2, 1 \leq i, j \leq 5), \\ (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5)^6 = 1, \\ (\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5^2 \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1)^2 = 1, \\ \theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4 \theta_5^2 \theta_4 \theta_3 \theta_2 \theta_1 \text{ commutes with } \theta_i \quad (1 \leq i \leq 5). \end{cases}$$

The Jones representation of Γ_2 mentioned above is given explicitly on generators as follows ([J], p362).

$$\pi : \Gamma_2 \longrightarrow GL_5(\mathbf{Z}[x, x^{-1}]), \quad x = t^{1/5};$$

$$\pi(\theta_1) = x^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \quad \pi(\theta_2) = x^{-2} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\pi(\theta_3) = x^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pi(\theta_4) = x^{-2} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & t \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

$$\pi(\theta_5) = x^{-2} \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

We see that $\det \pi(\theta_i) = -1, 1 \leq i \leq 5$.

Let $A = A(x) \in M_n(\mathbf{Z}[x, x^{-1}]), x = t^{1/5}$. We write A^* for ${}^t A(x^{-1})$ and

call A x -hermitian if $A = A^*$ and $A \neq 0_5$. For a x -hermitian matrix A , we define the unitary group with respect to A by

$$U_n(A) := \{g \in GL_n(\mathbf{Z}[x, x^{-1}]) \mid g^* A g = A\}.$$

Then, we can show the following lemma by a straightforward calculation.

LEMMA 1. *The image of the representation π is contained in $U_5(h)$ for the following x -hermitian matrix $h = h_t$.*

$$\begin{pmatrix} (1+t)(1+t^{-1}) & -(1+t) & 2 & -(1+t) & -(1+t) \\ -(1+t^{-1}) & 1+t+t^{-1} & -(1+t^{-1}) & 1 & 1 \\ 2 & -(1+t) & (1+t)(1+t^{-1}) & -(1+t) & -(1+t) \\ -(1+t^{-1}) & 1 & -(1+t^{-1}) & 1+t+t^{-1} & 1 \\ -(1+t^{-1}) & 1 & -(1+t^{-1}) & 1 & 1+t+t^{-1} \end{pmatrix}$$

Moreover, if a x -hermitian matrix H has the same property, H is $\mathbf{Q}(x)^\times$ -multiple of h .

2. The reduction of the specialized Jones representation at a root of unity and the conjecture of Oda

Let n be a natural number. We assume that n is bigger than 6 and prime to 15. Let $\eta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$ and $\zeta = \eta^5$. Set $K = \mathbf{Q}(\zeta)$, $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}[\zeta]$, $F = \mathbf{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ and $\mathcal{O}_F = \mathbf{Z}[\zeta + \zeta^{-1}]$.

By specializing $t \rightarrow \zeta$, $x = t^{1/5} \rightarrow \eta$ in the representation π , we get a representation

$$\pi_n : \Gamma_2 \longrightarrow GL_5(\mathcal{O}_K).$$

Take a non-zero ideal I of \mathcal{O}_F which is prime to n , and set $I_K = I\mathcal{O}_K$. The reduction of π_ζ modulo I_K defines the representation

$$\pi_{n,I} : \Gamma_2 \longrightarrow GL_5(\mathcal{O}_K/I_K).$$

Then, $\pi_{n,I}$ certainly inherits the unitarity from π so that the image of $\pi_{n,I}$ is contained in

$$U_5(\mathcal{O}_K/I_K; h_{n,I}) := \{g \in GL_5(\mathcal{O}_K/I_K) \mid g^* h_{n,I} g = h_{n,I}\},$$

where $h_{n,I} := h_\zeta \bmod I_K$ and $g^* = {}^t g^\tau$, τ is the involution induced from the generator of $\text{Gal}(K/F)$.

To formulate the conjecture, we twist $\pi_{n,I}$ a little bit. Let $\chi : \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{O}_K^\times$ be the character defined by $\chi(\theta_i) = -1$, and set $\chi_I := \chi \bmod I_K$. We then consider $\rho_{n,I} := \pi_{n,I} \otimes \chi_I$. Since $\det(\pi_\zeta(\theta_i)) = -1$, by Lemma 1, we have the inclusion

$$\rho_{n,I}(\Gamma_2) \subset SU_5(\mathcal{O}_K/I_K; h_{n,I}) := \{g \in U_5(\mathcal{O}_K/I_K; h_{n,I}) \mid \det(g) = 1\}.$$

Then, the conjecture posed by Oda is formulated as follows.

CONJECTURE 2. *There is a non-zero ideal \mathcal{C} of \mathcal{O}_F containing (n) so that the image of $\rho_{n,I}$ coincides with $SU_5(\mathcal{O}_K/I_K; h_{n,I})$ if I is prime to \mathcal{C} .*

3. The principal congruence subgroups of the Teichmüller modular group

We first recall the Nielsen isomorphism. Let $\pi_1(S, *)$ be the fundamental group of a compact Riemann surface of genus g , $g \geq 1$, with a base point $*$, and let $\text{Diff}_+(S)$ be the group of orientation preserving diffeomorphisms of S equipped with the compact-open topology. Recall that the Teichmüller modular group or mapping class group Γ_g is defined to be the group of connected components of $\text{Diff}_+(S)$. An automorphism $\alpha \in \text{Aut}(\pi_1(S, *))$ induces an automorphism $\tilde{\alpha}$ of the homology group $H_1(S, \mathbf{Z})$ and α is called orientation preserving if $\tilde{\alpha}$ preserves the symplectic intersection form on $H_1(S, \mathbf{Z})$. Let $\text{Aut}_+(\pi_1(S, *))$ (resp. $\text{Out}_+(\pi_1(S, *))$) be the group of orientation preserving automorphisms (resp. outer automorphisms) of $\pi_1(S, *)$. Then, we get the Nielsen isomorphism

$$\Gamma_g \simeq \text{Out}_+(\pi_1(S, *))$$

which is induced by the natural map $\text{Diff}_+(S) \rightarrow \text{Aut}_+(\pi_1(S, *))$.

From this and identifying $Sp_g(\mathbf{Z})$ with the group of automorphisms of $H_1(S, \mathbf{Z})$ preserving the symplectic form, we get a canonical homomorphism

$$\theta : \Gamma_g \longrightarrow Sp_g(\mathbf{Z}).$$

The Torelli subgroup of Γ_g is defined to be the kernel of θ .

Denoting by $Sp_g(\mathbf{Z}; N)$ the principal congruence subgroup of $Sp_g(\mathbf{Z})$ modulo a natural number N , we give the following

DEFINITION 3. We call $\Gamma_g(N) := \theta^{-1}(Sp_g(\mathbf{Z}; N))$ the principal congruence subgroup of the Teichmüller modular group Γ_g of genus g modulo N .

4. Results

For Conjecture 2, we have the following

THEOREM 4.1. Assume that n is prime to 15, bigger than 6. Let I be a product of prime ideals \wp_i of \mathcal{O}_F . Assume that each \wp_i is inert in K/F and prime to $6(1 + \zeta)(\zeta + \zeta^{-1})(1 + \zeta + \zeta^{-1})$ and $N\wp_i \geq 10$. Then, the image of $\rho_{n,I}$ coincides with $SU_5(\mathcal{O}_K/I_K, h_{n,I})$.

We define the normal subgroup $\Gamma_2(n, I)$ to be the kernel of $\rho_{n,I}$. The following theorem asserts that $\Gamma_2(n, I)$'s give a family of non-congruence subgroups.

THEOREM 4.2. Under the same assumptions in Theorem 4.1, the group $\Gamma_2(n, I)$ does not contain the Torelli subgroup, hence, any $\Gamma_2(N)$.

The geometrical interpretation of the above results is as follows.

Let \mathcal{T}_2 be the Teichmüller space of genus 2 and $\mathcal{M}_2 = \mathcal{T}/\Gamma$ be the moduli space of compact Riemann surfaces of genus 2. Let \mathcal{S}_2 be the Siegel upper half space of degree 4 and $\mathcal{A}_2 = \mathcal{S}_2/Sp_2(\mathbf{Z})$ be the moduli space of principally polarized abelian surfaces. The period map $\mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ is compatible with the actions of Γ_2 , $Sp_2(\mathbf{Z})$ and θ , and thus we obtain the Torelli map $\mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{A}_2$.

The Galois covering $\mathcal{A}_{2,N} := \mathcal{S}_2/Sp_2(\mathbf{Z}; N)$ over \mathcal{A}_2 with the Galois group $Sp_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$ is the moduli space of principally polarized abelian surfaces with level N -structure. Then, Theorem 4.2 tells us that the spaces $\mathcal{T}_2/\Gamma_2(n, I)$ give a family of Galois coverings over \mathcal{M}_2 with the Galois groups $SU_5(\mathcal{O}_K/I_K)$, which can not be obtained by the pull-back of any $\mathcal{A}_{2,N}$ via the Torelli map.

5. Sketch of the proof

The proof of Theorem 4.1 consists of 3 steps. Assume that n and I satisfy the same conditions in Theorem 4.1.

Step 1. We show that the representation $\rho_{n,\wp}$ is irreducible for an inert prime \wp . For this, we notice a fact that each $\pi_{n,\wp}(\theta_i)$ is a quasi-reflection, namely, there are subspaces X_i and Y_i of the representation space V so that

$$\begin{aligned} V &= X_i \oplus Y_i, & \dim X_i &= 3, \dim Y_i = 2, \\ \pi_{\wp}(\theta_i)|_{X_i} &= -\eta^{-2}id_{X_i}, & \pi_{\wp}(\theta_i)|_{Y_i} &= \eta^3id_{Y_i}, \end{aligned}$$

where η denotes a primitive n -th root of 1 in \mathcal{O}_K/\wp_K by abuse of notation.

Step 2. We show Conjecture 2 for an inert prime \wp . By Step 1, the image of $\rho_{n,\wp}$ mod. center is an irreducible subgroup of $PSL_5(\mathcal{O}_K/\wp_K)$ which is contained in the unitary group. Then, we investigate the list of all irreducible subgroups of $PSL_5(\mathcal{O}_K/\wp_K)$ due to Martino-Wagoner [M-W]. For this, we first notice a fact that the image of $\rho_{n,\wp}$ can not be realized over a smaller subfield of \mathcal{O}_K/\wp_K , which excludes many groups in the list. Then, we use properties which follows directly from the defining relation of the generators of Γ_2 and some facts about finite classical group to exclude remaining groups other than $SU_5(\mathcal{O}_K/I_K)$ in their list.

Step 3. We show Conjecture 2 for I in general. It is done applying a criterion of Weisfeiler [W] on the approximation of a Zariski-dense subgroup in a semisimple group scheme over a finite Artin ring, which we recall below in our setting. Let I be a product of different prime ideals \wp_i of \mathcal{O}_F ; $I = \prod_{i=1}^r \wp_i^{e_i}$, where each \wp_i is inert in K/F and prime to $6(1+\zeta)(\zeta+\zeta^{-1})(1+\zeta+\zeta^{-1})$. Set $A = \mathcal{O}_F/I$, $A_i = \mathcal{O}_F/\wp_i^{e_i}$ and $k_i = \mathcal{O}_F/\wp_i$, $q_i = N\wp_i$. So, we have decompositions $A = \bigoplus_{i=1}^r A_i$ and the radical of A is $R = \prod_{i=1}^r \wp_i$ modulo I . Let G be the special unitary group schemes over A with respect to the hermitian forms $h_{n,I}$. Choose a maximal A -torus T of G contained in a Borel A -subgroup. We say that $T(k_i)$ ($=$ prime to p_i -part of $T(A_i)$, $p_i = \text{char. } k_i$) distinguishes the roots of T on G if for two roots r_1, r_2 of T on G , $r_1|T(k_i) = r_2|T(k_i)$ implies $r_1 = r_2$. For each i , $1 \leq i \leq r$, let N_i be the natural number such that if $q_i = N\wp_i > N_i$ then $T(k_i)$ distinguishes the roots of T . Finally, let L be the Lie algebra of G and $Ad : G(A) \rightarrow GL(L(A))$ be the adjoint representation.

LEMMA 5.1 ([W], Theorem (7.2)). *Notation being as above, assume that*
(1) $q_i \geq \max(10, N_i)$, $1 \leq i \leq r$,
(2) *The image of Γ_2 in $G(k_i)$ under the reduction modulo $\wp_i/\wp_i^{e_i} \oplus \oplus_{j \neq i} \mathcal{O}_F/\wp_j^{e_j}$ is the whole $G(k_i)$,*
(3) $\mathbf{Z}[\mathrm{tr} \mathrm{Ad}(\Gamma_2) \bmod R^2] = A/R^2$.
Then, we have the equality $\rho_{n,I}(\Gamma_2) = G(A) = \mathrm{SU}_5(\mathcal{O}_K/I_K; h_{n,I})$.

Actually, we check the assumptions in Lemma 5 by transforming the hermitian form $h_{n,I}$ into a convenient form using the existence of unitary basis over A so that a maximal A -torus consists of diagonal matrices, and the Lie algebra and roots can be explicitly computable.

Theorem 4.2 follows from the following Lemma on the structure of the Torelli subgroup of genus 2, which is due to Birman.

LEMMA 5.2 ([Bi1], Theorem 2). *The Torelli group of genus 2 is generated by the normal closure of $(\theta_1 \theta_2 \theta_1)^4$.*

References

- [Be] G. Berger, Fake congruence modular curves and subgroups of the modular group, (1995), preprint.
- [Bi1] J. Birman, On Siegel modular group, Math. Ann., **191**, 59-68 (1971).
- [Bi2] J. Birman, Braids, links and mapping class groups, Ann. Math. Studies, **82**, (1974).
- [I] T. Ichikawa, On Teichmüller modular forms, Math. Ann., **299**, 731-740, (1994).
- [J] V.F.R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math., **126**, 335-388 (1987).
- [M] M. Morishita, On a family of subgroups of the Teichmüller modular group of genus two obtained from the Jones representation, (1996), preprint.
- [M-W] L.D. Martino and A. Wagoner, The irreducible subgroups of $PSL(V_5, q)$, where q is odd, Resultate d. Math. **2**, 54-61 (1978).
- [O-T] T. Oda and T. Terasoma, Surjectivity of reduction of the Burau representations of Artin braid groups, (1996), in preparation.

- [S] K. Saito, The Teichmüller space and a certain modular function from a view point of group representation, RIMS-901, Kyoto Univ. (1992).
[W] B. Weisfeiler, Strong approximation for Zariski-dense subgroups of semisimple algebraic groups, Ann. of Math., **120**, 271-315 (1984).

Masanori Morishita
Department of Mathematics
Kanazawa University
Kakuma, Kanazawa, 920-11
Japan.